ZÁKLADY MHD

Pohyb částic v elektrickém poli

plně ionizované plazma:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m\vec{v}}{\tau} + e\vec{E}$$

↳ τ ... char. čas ztráty hybnosti srážkami

⇒ stacionární rychlost: $\frac{dv}{dt} \to 0$

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{e\vec{E}\tau}{m}$$

proudová hustota:

$$\vec{j} = Zen\langle\vec{v}\rangle = \frac{Ze^2\tau n}{m}\vec{E}$$

σ ... elektrická vodivost

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

srážky jen Coulombovské

char. změna hybnosti ~ char. coulombově síle na char. srážkové vzdálenosti d:

$$\frac{mv}{\tau} \sim \frac{Ze^2}{d^2}$$

protože $\tau \sim \frac{d}{v}$ ... vzdálenost na níž částice ztratí hybnost

$$\Rightarrow \frac{mv}{\frac{d}{v}} = \frac{Ze^2}{d^2}$$

$$mv^2 = \frac{Ze^2}{d} \to \underbrace{d \sim \frac{Ze^2}{mv^2}}$$

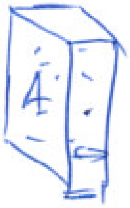
účinný průřez srážky: $\Sigma \approx d^2 \sim \frac{Z^2e^4}{m^2v^4}$

bez odvození $\Sigma = \frac{Z^2e^4}{m^2v^4}\Lambda$

↳ Coulombův logaritmus

$\Lambda \sim 10$

srážky jinak:



dx

deskou → A plocha

v desce $nA\,dx$ atomů

zakryto $\frac{nA\Sigma\,dx}{A} = n\Sigma\,dx$

změna toku částic:

$$\Gamma' = \Gamma(1 - n\Sigma\,dx)$$

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dx} = -n\Sigma\Gamma$$

řešení: $\Gamma = \Gamma_0 e^{-n\Sigma x} = \Gamma_0 e^{-\frac{x}{\lambda_c}}$

$$\lambda_c = \frac{1}{n\Sigma}$$ ... char. srážková vzdálenost

$$\tau = \frac{\lambda_c}{v} = \frac{1}{n\Sigma v}$$

dosadit

$$\tau = \frac{m^2 v^3}{n Z^2 e^4 \Lambda}$$

vodivost: $$\sigma = \frac{Z e^2 \tau n}{m} = \frac{Z e^2 n m^2 v^3}{m n Z^2 e^4 \Lambda}$$

odhad: $kT \sim mv^2$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{(kT)^{3/2}}{\sqrt{m}\, Z e^2 \Lambda}$$

zpět k poh. rovnici:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} + \frac{eE}{m} = -\frac{n Z^2 e^4 \Lambda}{m^2 v^2} + \frac{eE}{m}$$

↳ tvar: $\frac{eE_D}{m}$

$$\Rightarrow E_D = \cancel{\frac{n z^2 e^3 \Lambda}{kT}} = \frac{n z^2 e^3 \Lambda}{m v^2}$$ Dreicerovo pole

pro $E > E_D$ ... není stac. řešení → stálá akcelerace

„run-away electrons"

$$E_D = \frac{n z^2 e^3 \Lambda}{kT} \sim \frac{e}{\lambda_D}$$

Debyeův poloměr

Dreicerovo pole → pole elektronu v Debyeově vzdálenosti

Efekty magnetického pole

pohyb pouze v mg. poli → odstředivá síla = = Lorentzova

$$e v_\perp B = \frac{m v_\perp^2}{r} \quad \Big| \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow r = \frac{m v_\perp}{eB}$$ ... Larmorův poloměr

odpovídající frekvence: $\omega = \frac{v_\perp}{r} = \frac{eB}{m}$

↳ Larmorova frekvence

obecný pohyb:

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \underbrace{m \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

partikulární řešení ⇒ kroužívý pohyb

$$\Rightarrow E + v \times B = 0 \quad \Big| \times B$$

$$E \times B + (v \times B) \times B = 0$$

$$E \times B = B \times (v \times B) = v B^2 - B(v \cdot B)$$

příčná složka:

$$\vec{v}_E = \frac{E \times B}{B^2} \quad \dots \quad E\text{-}B \text{ drift}$$

další drifty v jiných polích

obecně: $\vec{v}_f = \frac{1}{e} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}$

Ohmův zákon

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{v}}{\tau} + \frac{e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

stac. rychlosti:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\tau e}{m}(\vec{E} + \langle \vec{v} \rangle \times \vec{B})$$

$$\vec{j} = zen \langle v \rangle = \sigma \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \underbrace{\sigma}_{\frac{\tau e^2 n z}{m}} \vec{E} + \frac{e\tau}{m}(\vec{j} \times \vec{B}) = \sigma E + \frac{\omega\tau}{B}(\vec{j} \times \vec{B})$$

rovnice pro $\vec{j}$

řešení: $\vec{j} = \sigma_\parallel \vec{E}_\parallel + \underbrace{\sigma_\perp \vec{E}_\perp}_{\text{~~Hallův jev~~}} + \underbrace{\sigma_H \frac{\vec{B} \times \vec{E}_\perp}{B}}_{\text{Hallův jev}}$

$$\sigma_\parallel = \sigma; \quad \sigma_\perp = \frac{\sigma}{1+\omega^2\tau^2}; \quad \sigma_H = \frac{\omega\tau\sigma}{1+\omega\tau^2}$$

pro $\vec{B} = (0, 0, B)$

$$\left(\vec{j}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_\perp & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\parallel \end{pmatrix} \left(\vec{E}\right)$$

v koróně: $\omega\tau \gg 1$

$$\Rightarrow \sigma_\perp \ll \sigma_H \ll \sigma$$

$\Rightarrow$ el. proud kolmý na mg. pole je zanedbatelný

$\boxed{\text{MHD rovnice}}$

Maxwellovy rovnice:

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad \nabla \times B = \mu j + \mu \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\sigma_e}{\varepsilon} \qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$j = (E + v \times B)\sigma$$

zachování náboje:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} = -\nabla \cdot j = \left| j = \sigma E \right| = -\sigma \nabla \cdot E = -\sigma \frac{\sigma_e}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\sigma_e \Rightarrow \sigma_e = \sigma_e^0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

$\hookrightarrow \tau \sim \frac{\varepsilon}{\sigma}$

pro korónu: $\frac{\varepsilon}{\sigma} \sim 10^{-12}\,s \Rightarrow$ kvazineutrální stav

$\Rightarrow \sigma_e \sim 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} \to 0$ ... důležité jen na krátkých škálách

+ rovnice hydrodynamické:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0$$ ← jako momenty Boltzmannovy rce

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v\right) = -\nabla P + \underbrace{j \times B}_{\text{Lorentz}}$$

tepelná rovnovaha $\rho\, \overset{dQ}{T \frac{ds}{dt}} = Q - L$

$\hookrightarrow s = c_v \ln \frac{P}{\rho^\gamma}$; Q ... vstup energie, L ... ztráty energie

pokud $U = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho}$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{dU}{dt} + P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = Q - L$$

přepis s rovnicí kontinuity:

$$\rho \frac{dU}{dt} + \rho P \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \rho \frac{dU}{dt} - \rho P \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{dU}{dt} - \frac{P}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot v = 0 \right| = \rho \frac{dU}{dt} + P \nabla \cdot v$$

čili: $\rho \frac{dU}{dt} + P\nabla \cdot v = Q - L$

Difúze mg. pole

$$E = j\frac{1}{\sigma} - v \times B \quad / \nabla \times$$

$$\nabla \times E = \frac{1}{\sigma} \nabla \times j - \nabla \times (v \times B)$$

$\nabla \times E \to -\frac{\partial B}{\partial t}$, $\quad j = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times B$

$$\underbrace{\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (v \times B) - \nabla \times (\nabla \times B)\frac{1}{\mu \sigma}}$$

centrální MHD rovnice:

$\underbrace{\nabla \times (v \times B)}_{\text{advekce pole}}$ $\quad$ $\underbrace{\nabla \times (\nabla \times B)\frac{1}{\mu\sigma}}_{\text{difúze pole}}$

relativní důležitost obou členů

$$\nabla \times \to \frac{1}{L} \qquad \eta = \frac{1}{\mu\sigma}$$

$$R_M = \frac{\frac{vB}{L}}{\frac{1}{\mu\sigma}\frac{B}{L^2}} = v\mu\sigma L \text{''} \frac{vL}{\eta} \text{''} \text{ ... Reynoldsovo číslo}$$

pro korónu: $R_M \gg 10^4$ ... pole je zamrzlé

$$\nabla \times (\nabla \times B) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot B}_{\to 0}) - \Delta B = -\Delta B$$

pro $v = 0$ difúzní rovnice:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = D \Delta \vec{B} \qquad D = \frac{1}{\mu\sigma}$$

$\hookrightarrow$ difúzní koeficient

=8/6= $\quad$ – erupce: $L \sim 1\,\text{km}$; skvrny $\tau \sim 10^7\,\text{s} \sim 4$ měsíce

zamrzlé pole

pro $R_M \gg 1 \iff \sigma \to \infty$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (v \times B)$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

1-D případ: $B = (0, B, 0)$, $v = (v, 0, 0)$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(vB)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)$$

$$\Rightarrow \frac{dB}{dt} + B\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dB}{dt} - \frac{B}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0}$$

$$\frac{d\,(B/\rho)}{dt} = 0$$

$\hookrightarrow \frac{B}{\rho} = \text{konst}$

obecný 3-D případ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \nabla\right)\vec{v}$

$\hookrightarrow$ plazma následuje mg. pole

tok: $\phi = \int_{S_\Gamma} B \cdot d\vec{S}$ ... tok přes plochu uzavřenou křivkou Γ

změna: $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi'}{dt} + \frac{d\phi''}{dt}$

$\downarrow$

$\frac{d\phi'}{dt} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ ... změna pole druhý člen: změna plochy pohybem:

$$d\vec{S} = \vec{v}\, dt \times d\vec{l}$$

↳ změna délky křivky Γ

$$d\phi'' = \vec{B}\cdot d\vec{S} = \vec{B}\cdot(\vec{v}\times d\vec{l})\,dt = -dt\,(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

$$\hookrightarrow \frac{d\phi''}{dt} = -\int_\Gamma (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

↳ Stokesova věta

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} - \int_\Gamma (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} =$$

$$= \int_{S_\Gamma} \underbrace{\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})\right]}_{=0 \text{ podle předpokladu}}\cdot d\vec{S}$$

$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = 0 \rightarrow$ celkový tok se nezmění deformacemi oblasti

Obecná magnetická síla

Lorentzova síla:

$\vec{f} = \vec{j}\times\vec{B}$: zobecnění: $f = \frac{1}{2\mu}\nabla\vec{B}\times\vec{B}$

$$\vec{j}\times\vec{B} = -\underbrace{\nabla\frac{B^2}{2\mu}}_{\text{mg. tlak}} + \underbrace{(\vec{B}\cdot\nabla)\frac{\vec{B}}{\mu}}_{\text{mg. tenze}}$$

obecný tenzor: $\underbrace{B_{ik} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}\delta_{ik}B^2 - B_i B_k\right)}_{\text{Maxwellův tenzor}}$

pak Lorentzova síla: $\vec{f} = -\frac{\partial}{\partial x_k} B_{ik}$

akce magnetických sil je anizotropická!

$\boxed{\text{MHD vlny}}$

ve vakuu: $\rho_e = 0 \Rightarrow \nabla \cdot E = 0, \; \nabla \cdot B = 0$

dále: $\nabla \times E_1 = -\dot{B}_1 \qquad /^{\cdot}$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B_1 = \varepsilon_0 \dot{E}_1 \qquad /:\varepsilon_0 \;, \nabla\times$$

$$\nabla \times \dot{E}_1 = -\ddot{B}_1$$

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla \times (\nabla \times B_1) = \nabla \times \dot{E}_1$$

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times B_1) = -\ddot{B}_1$$

riešení $\quad B_1 \sim e^{i(kx - \omega t)}$

$$c^2 [k \times (k \times B_1)] = c^2 [\underbrace{k\,(k \cdot B_1)}_{0} - k^2 B_1] = -\omega^2 B_1$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 k^2 = \omega^2}$$

v prostredí:

$$\nabla \times E_1 = -\dot{B}_1 \qquad /\nabla\times$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B_1 = j_1 + \varepsilon_0 \dot{E}_1 \qquad /:\varepsilon_0 \;, ^{\cdot}$$

$$\nabla \times (\nabla \times E_1) = \nabla(\nabla \cdot E_1) - \Delta E_1 = -\nabla \times \dot{B}_1$$

$$c^2 \nabla \times \dot{B}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial j_1}{\partial t} + \ddot{E}_1$$

$$\underbrace{-k(k \cdot E_1)}_{=0 \text{ ... priečne vlny}} + k^2 E_1 = \frac{i\omega}{\varepsilon_0 c^2} j_1 + \frac{\omega^2}{c^2} E_1$$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} j_1$$

j_1 ... od elektronů $\rightarrow$ $j_1 = -n_0 e v_{e1}$

platí poh. rce: $m \dfrac{\partial v_{e1}}{\partial t} = -e E_1$

$$v_{e1} = \frac{e E_1}{i m \omega}$$

$$(\omega^2 - k^2c^2)E_1 = \underbrace{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}}_{\omega_p^2} E_1$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2}$$

<u>MHD vlny</u>

rovnice:

$$\nabla\times(\nabla\times E_1) = \underbrace{-k(k\cdot E_1)+k^2E_1 = \frac{\omega^2}{c^2}E_1 + \frac{i\omega}{\varepsilon_0 c^2} j_1}$$

hledáme řešení $\vec{k} = k\vec{z}$ a $\vec{E_1} = E_1\vec{x}$, $\vec{B_0} = B_0\vec{z}$

$\Rightarrow$ x-složka: $(\omega^2 - k^2c^2)E_1 = -\dfrac{i\omega}{\varepsilon_0 c^2} j_1$

j_1 ... od elektronů i iontů:

$$j_1 = n_0 e(v_{ix} - v_{ex})$$

ionty: $$M\frac{\partial \vec{v}_{i1}}{\partial t} = -e\vec{E_1} + e\vec{v}_{i1}\times\vec{B_0}$$

složky:
$$-i\omega M v_{ix} = -eE_1 + e v_{iy} B_0$$
$$-i\omega M v_{iy} = -e v_{ix} B_0$$

řešení:
$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega}\left(1-\frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}E_1$$
$$v_{iy} = \frac{e}{M\omega}\frac{\Omega_c}{\omega}\left(1-\frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}E_1$$
$$\Omega_c = \frac{eB_0}{M}$$

elektrony: —"— $M\to m$, $e\to -e$, $\Omega_c\to\omega_c$; $\omega_c^2 \gg \omega^2$

$$v_{ex} = \frac{ie\omega^2}{m\omega\omega_c^2}E_1 \longrightarrow 0$$

$$v_{ey} = -\frac{e}{m}\frac{\omega_c}{\omega^2}\frac{\omega^2}{\omega_c^2}E_1 = -\frac{E_1}{B_0}$$

---

rovnice: $$(\omega^2 - c^2k^2)E_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} n_0 e \frac{ie}{M\omega}\left(1-\frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}E_1$$

$$\Omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 M}$$

$$(\omega^2 - c^2k^2) = \Omega_p^2 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}$$

předpoklad: $\omega^2 \ll \Omega_c^2$ ... frekvence vlny nízká

$$\omega^2 - c^2k^2 = -\omega^2 \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} = -\omega^2 \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 M} \frac{M^2}{e^2 B_0^2} = -\omega^2 \frac{\rho}{\varepsilon_0 B_0^2}$$

$\hookrightarrow$ disp. relace: $$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0 B_0^2}}$$ $n_0 M = \rho$

$1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0 B_0^2} \gg 1$ $\rightarrow$ jmenovatel

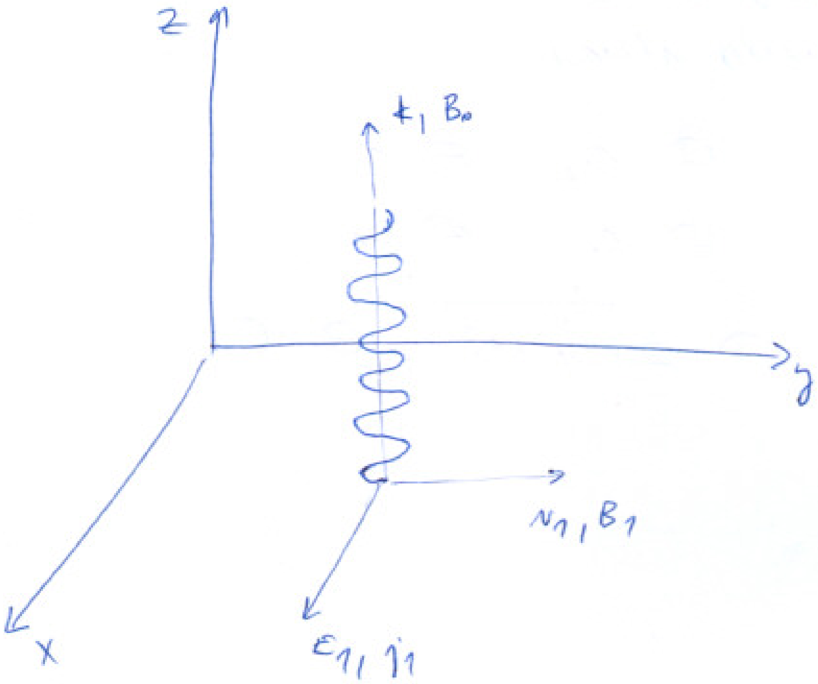
$\hookrightarrow$ dielektrická konstanta $\gg 1$ obvykle

$$\Rightarrow \frac{\omega}{k} = v_f = \frac{c B_0}{(\rho/\varepsilon_0)^{1/2}} = v_A$$

$$\boxed{v_A = c B \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \frac{B}{\sqrt{\rho}}}$$

alfvénova rychlost

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{c^2}{v_A^2}$$



char. rychlost, s níž postupují poruchy siločar

E_1 pole $\rightarrow$ $E \times B$ drift v $-\vec{y}$ směru, elektrony i ionty stejně, protože $\omega^2 \ll \Omega_c^2$

siločáry $\rightarrow$ pohyb v $\vec{z}$ směru $\Rightarrow$ zvlnění stejně jako pohyb částic

⇒ Obojí osciluje společně, jakoby částice byly navlečeny na mg-pole

↳ představa OK, pokud není $\vec{E}$ ve směru $\vec{B}_0$

Ex pole → důsledek zpožďování ve iontů → proud ve směru $\vec{x}$. síla $\vec{j}_1 \times \vec{B}_0$ udržuje oscilace

→ umožňuje drift kolmo na $\vec{B}_0$, ale stále po siločarách

+ další typ vln:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2}\left(c^2 + c_A^2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{c_A^4 + c^4 - 2c_A^2 c^2 \cos 2\vartheta}$$

ϑ ... úhel mezi $\vec{k}$ a $\vec{B}_0$

$+$ ... rychlá MHD vlna

$-$ ... pomalá MHD vlna

pro $\vartheta = 0$: $c_A > c$: $\oplus$ c_A $\ominus$ c

$c_A < c$: $\oplus$ c $\ominus$ c_A

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$: $\oplus$ $\pm\sqrt{c_A^2 + c^2}$, $\ominus$ 0