

Helioseismologie

moderní směr ve výzkumu Slunce

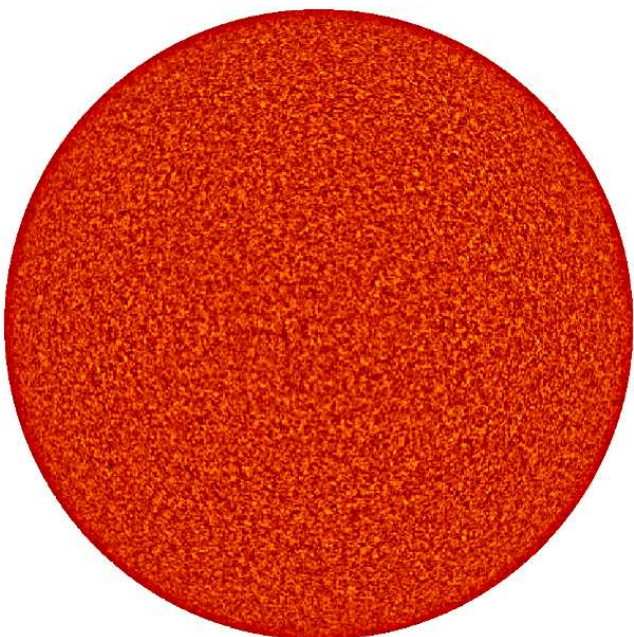
Michal Švanda

Astronomický ústav Akademie věd České republiky, observatoř Ondřejov, svanda@asu.cas.cz

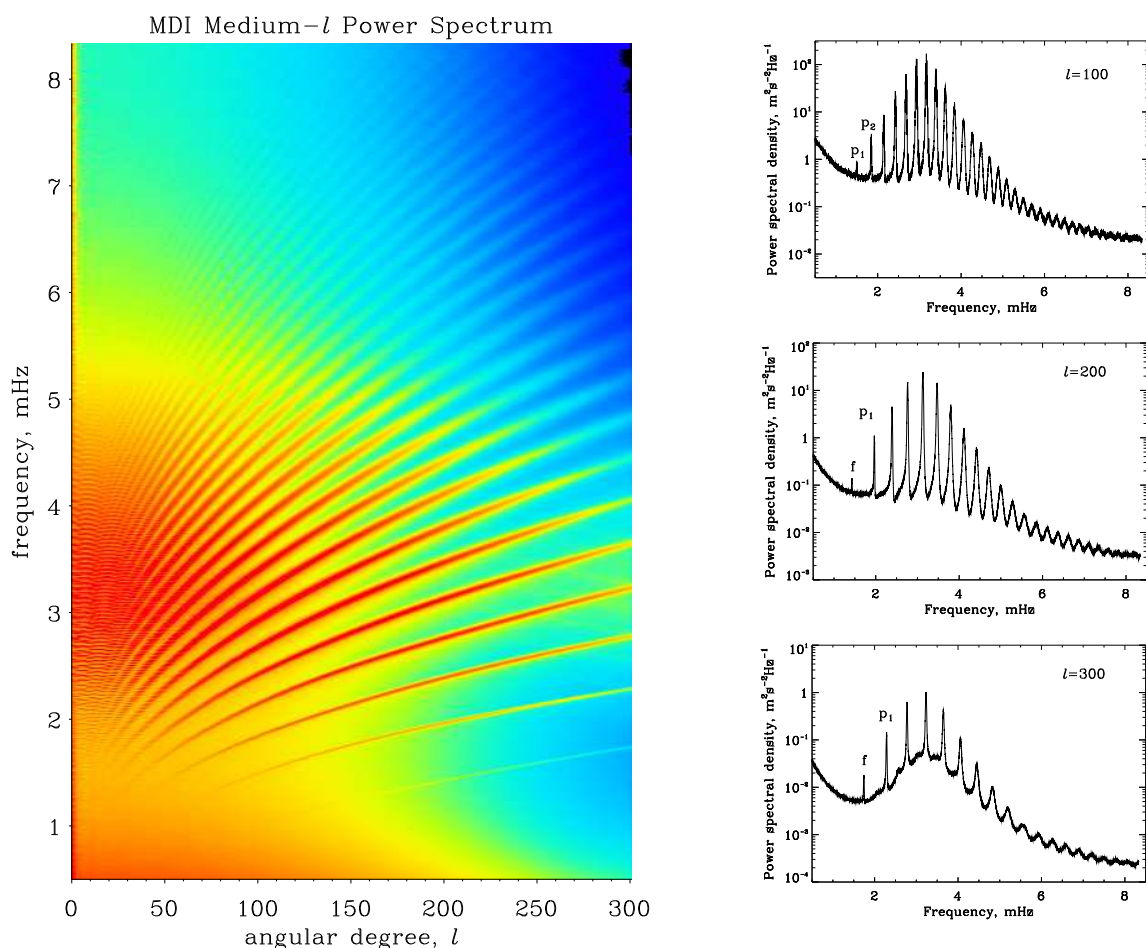
Slunečním fyzikům se pootevírají dveře umožňující nahlédnout pod doposud neproniknutelnou fotosféru. Za několik posledních desetiletí se slibně rozvinula metoda umožňující z pozorování sluneční fotosféry odvodit informace o slunečním nitru. Helioseismologie vděčí za svůj název podobnosti s jednou z metod geofyziky. Teprve sluneční fyzika ale dovedla metodu k dokonalosti.

1 Oscilace

Oscilační pohyby ve sluneční fotosféře byly objeveny v roce 1960 spektroheliografickou metodou. Odečtením fotografických desek pořízených v modrém a červeném křídle spektrální čáry vznikl rozdílový obraz, v němž intenzitní variace odpovídají projekci lokálních pohybů do směru k pozorovateli. Prostorové rozlišení oscilací je zobrazeno na obr. 1. V daném místě rychlostní pole podléhá kvazisinusoidálním změnám s amplitudou několika stovek m/s a periodou 296 s (Leighton et al., 1962). Pohyby oscilací jsou převážně radiální a jejich původ je zřejmě ve zvukových vlnách způsobených konvektivními pohyby odpovědnými za granulaci, což vysvětluje, proč jsou pětiminutové oscilace ve fotosférických čarách nejvýraznější – přesto musíme mít na paměti, že jde o interferenci 10^7 různých módů tlakových oscilací. Mod studované trojdimenzionální vlny je popsán třemi čísly n , m a l . Číslo n odpovídá počtu uzlových rovin od středu k povrchu, l počtu uzlových kružnic na povrchu a m je počet z nich, procházející pólem souřadnicového systému. Čtvrtou popisnou veličinou je frekvence vlny. Oscilace s periodami menšími než 100 s jsou obtížně detekovatelné, protože jejich vlnová délka je porovnatelná se střední volnou dráhou fotonu ve svrchní části atmosféry. V chromosférických čarách jsou pozorovány oscilace s periodami 180 a 240 s.



Obr. 1: Prostorové rozložení oscilací na slunečním disku. Pokles kontrastu směrem k okraji disku naznačuje, že struktura oscilací je dominantní v radiálním směru. (Švanda, 2004)



Obr. 2: Měřené spektrum slunečních oscilací. Vlevo – ekvivalent k - ω diagramu získaný z pozorování přístroje MDI na palubě družicové observatoře SoHO ($k \sim \sqrt{l(l+1)}$). Vpravo – řezy l - ν diagramem v třech vlnových číslech ukazují, že největší výkon mají oscilace v pásu frekvencí 2–4 mHz. (Rhodes et al., 1997)

Již první studie distribuce horizontálního vlnového čísla $k_h = 2\pi/\lambda_h$ jednotlivých modů oscilací vůči jejich frekvenci $\omega = 2\pi\nu$ naznačily, že struktura modů je spíše diskrétní, než spojitá. Až v roce 1975 byla potvrzena „hřbetová“ struktura oscilací v k - ω diagramu z pozorování dopplerovských rychlostí v rozsáhlé oblasti slunečního disku po dobu několika hodin. Největší výkon pozorovaných oscilací je soustředěn v pásu frekvencí 2,5–4,5 mHz a s vlnovými čísly menšími než $0,8 \text{ Mm}^{-1}$ (tedy s vlnovými délkami většími než $8 \times 10^3 \text{ km}$). Struktura modů v k - ω diagramu je zobrazena na obr. 2. Sluneční oscilace lze pozorovat nejen jako rychlostní struktury, ale také jako variace celkového zářivého toku (např. celkový výkon pětiminutových oscilací je schopen vygenerovat relativní variace 10^{-5} v celkovém zářivém toku).

Ionizované plazma se může v tělese Slunce poměrně snadno přemisťovat z místa na místo, ale také zhušťovat a zředňovat. V současnosti se má za to, že původcem snad všech typů vln je náhodné vychýlení nějakého elementárního objemu slunečního plazmatu. Další osud tohoto elementu pak závisí na okolním prostředí. Sledovaný objemový element byl totiž na svém původním místě v rovnováze s okolím. Při vychýlení se dostane do oblastí, kde jsou teplota, tlak i hustota jiné. Nacházíme-li se v oblasti pod konvektivní zónou, průběh teploty, tlaku i hustoty vykazuje nárůst ve směru do středu hvězdy. Pokud bude hustota sledovaného elementu větší než hustota okolí, převáží gravitační síla, která má tendenci vrátit tento element do oblastí, které mají hustotu stejnou. Ze setrvačných důvodů element překmitne na druhou stranu, kde převáží vztlačková síla snažící se element vytlačit opět vzhůru. Celý proces se

pak periodicky opakuje a produkuje mechanické vlnění, které se šíří dále slunečním tělesem. Protože je podstatou tohoto typu gravitační síla, nazýváme tento typ g -vlnami.

V oblastech blíže sluneční fotosféry se průběh tlaku, teploty a hustoty mění na opačný. Vychýlený element pak není vrácen gravitační silou do své původní pozice, ale naopak je urychlován silou vztlakovou a stoupá vzhůru až k horní hranici konvektivní zóny. Při svém pohybu dává do pohybu tlakové nehomogenity, které se v konvektivní zóně šíří na všechny směry (fyzikálně je tento princip analogický šíření zvuku). Podstatou tohoto typu oscilací je síla tlaková, mluvíme tedy o p -vlnách.

Třetí typ má opět podstatu v gravitaci a velmi připomíná vlnění mořské hladiny. Vyzdvižený element způsobí dočasný úbytek hmoty ve svém těsném okolí – vznikne tak jakýsi hřeben a údolí vlny. Hřeben je přitahován gravitací zpět a do údolí též působením gravitace padá látka z okolí. Proces je opět periodický a dává za vznik f -vlnám.

1.1 Vsuvka o měření oscilací

Sluneční oscilace je možné měřit z jejich dopplerovských projevů, nebo jako oscilace toku energie. Měření proměnného signálu s různými frekvencemi má svá specifika a bývá zvykem převádět kontinuální signál do spektra pomocí Fourierova rozkladu.

Jedno z pravidel Fourierovy analýzy je, že ze signálu měřeného po dobu T je možné získat informace s frekvenčním rozlišením $\Delta\omega = 2\pi/T$. Což v praxi znamená, že chceme-li od sebe rozlišit sousední frekvence ω a $\omega + \Delta\omega$, musíme pozorovat po čas $T = 2\pi/\Delta\omega$. Nejnižší frekvence získatelná z Fourierovy analýzy je taktéž dána délkou měření a je rovna frekvenčnímu rozlišení $\Delta\omega$. Ve speciálních případech je možné získat určitými matematickými metodami i informace na nižších frekvencích, než dovoluje kritérium dané rozlišením.

Nejvyšší frekvence, která je ve spektru viditelná, je dána vzorkovacím teorémem a je rovna *Nyquistově frekvenci*. Ta je dána jednoduchým vztahem $\omega_{Ny} = \pi/\Delta t$, kde Δt je časové rozlišení, s nímž je signál pořizován. Pokud signál obsahuje frekvence větší než ω_{Ny} , pak se vzorkováním tyto frekvence aliasují do nižších. Pokud předpokládáme existenci vyšších frekvencí, než je Nyquistova, je nutné buď vzorkovat rychleji (s menším Δt), nebo tyto frekvence ještě před záznamem ze signálu odstranit.

Totéž pak platí pro informace získávané v prostorové doméně. Podmínky lze pak shrnout do vztahů:

$$\Delta\omega = 2\pi/T \leq \omega \leq \pi/\Delta t, \quad (1)$$

$$\Delta k_x = 2\pi/L_x \leq k_x \leq \pi/\Delta x, \quad (2)$$

kde L_x je rozměr výsledného měření ve směru x s vzorkováním Δx a k_x je komponenta vlnového vektoru.

Rozklad oscilací pomocí Fourierovy transformace je vhodný pouze pro malou oblast slunečního disku, kde lze použít kartézský souřadnicový systém. V případě, že jsou oscilace měřeny na větší oblasti slunečního disku, je nutné použít rozklad do sférických harmonických funkcí Y_l^m .

2 Lineární adiabatické oscilace nerotujícího Slunce

První typy oscilací pozorované u hvězd byly radiální mody související s expanzí nebo kontrakcí hvězdného obalu, zejména u proměnných hvězd typu δ Cephei a jiných. Periodu takových oscilací pro Slunce můžeme odhadnout následujícím výpočtem za předpokladu, že Slunce kmitá v „první harmonické“ (podle Foukal, 2004). Takový mod je zachycen mezi centrem (kde musí být z důvodu symetrie uzel) a povrchem, kde je mod odražen z důvodu tlakové diskontinuity. Pro takový mod platí, že $\lambda \sim R_\odot$. Čas, za který vzruch dorazí přes celý sluneční průměr a zpět, který charakterizuje periodu oscilace, může být odhadnut na základě znalosti

střední rychlosti zvuku c ve slunečním nitru. Tu lze odhadnout pomocí vztahu

$$c = \sqrt{\gamma \bar{P} / \bar{\rho}} \sim \sqrt{\gamma G M_{\odot} / R_{\odot}} , \quad (3)$$

kde střední tlak byl odhadnut¹ vztahem

$$\bar{P} \sim \frac{G M_{\odot}}{R_{\odot}^2} \rho R_{\odot} . \quad (4)$$

Z předchozího lze odhadnout periodu fundamentálních oscilací

$$\tau = 4 R_{\odot} / c \sim 4 \left(R_{\odot}^3 / \gamma G M_{\odot} \right)^{1/2} \sim (G \bar{\rho})^{-1/2} , \quad (5)$$

což pro Slunce činí cca 60 min.

Pro odvození vztahů pro oscilace je třeba vyjít hydrodynamických rovnic (podle Stix, 1989):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (7)$$

Předpokládejme, že stavové parametry jsou tvořeny pozadím a eulerovskou lineární poruchou (poruchou v daném místě Slunce), tedy např. $\rho = \rho_0 + \rho_1$. Zavedme $\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_1$, ξ odpovídá výchylce od rovnovážné polohy. Pak při zanedbání členů druhého a vyššího řádu a za předpokladu, že $\nabla \cdot v_0 = 0$:

$$\overbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 v_0)}^{=0} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 v_1) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \nabla p_1 - \frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \nabla p_0 - \nabla \Phi_1 - \nabla \Phi_0 \quad (9)$$

Rovnici (8) lze přepsat do formy

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 v_1) = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \implies \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = 0 \quad (10)$$

Z rovnice (9) pak plyne (vezmeme-li v úvahu, že $\frac{1}{1+\rho_1/\rho_0} = (1 + \rho_1/\rho_0)^{-1} \sim 1 - \rho_1/\rho_0$):

$$\overbrace{\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + \nabla \Phi_0}^{=0} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{1 + \rho_1/\rho_0} \nabla p_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \nabla p_0 + \nabla \Phi_1 = 0$$

$$\implies \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \nabla p_1 + \rho_0 \nabla \Phi_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \nabla p_0 = 0 \quad (11)$$

Rovnice je třeba doplnit Poissonovou rovnicí, která svazuje poruchu gravitačního potenciálu s poruchou hustoty:

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 . \quad (12)$$

¹Stejně jako poměr $\bar{P}/\bar{\rho}$ je možné jej odhadnout z rovnic hvězdného nitra $\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi\rho r^2}$ a $\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$ hrubým nahrazením diferenciálních rovnic rovnicemi diferencními mezi jádrem a povrchem za předpokladu konstantního tlaku \bar{P} v celém tělese. Rovnice pak přejdou na tvar $\frac{R_{\odot}-0}{M_{\odot}-0} = \frac{1}{4\pi\bar{\rho}R_{\odot}^2}$ a $\frac{0-\bar{P}}{M_{\odot}-0} = -\frac{GM_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^4}$, z nichž lze zde použité hrubé odhady již přímo vypočítat.

Rovnice řešíme za platnosti adiabatické aproximace, kterou lze popsat vztahem:

$$\frac{\delta P}{P_0} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0}, \quad (13)$$

kde δ značí lagrangeovskou poruchu, která je s eulerovskou svázána vztahem: $\delta f = f_1 + \xi \cdot \nabla f_0$, γ je adiabatický exponent, který je svázán s adiabatickou rychlostí zvuku vztahem:

$$c^2 = \gamma P_0 / \rho_0. \quad (14)$$

Protože všechny stavové veličiny závisí výhradně na radiální vzdálenosti r od středu Slunce, řešíme problém lineárních oscilací s radiální symetrií. Rovnice je proto třeba převést do sférických souřadnic. Definujeme-li:

$$\xi = e^{i\omega t} \left(\xi_r(r), \xi_h(r) \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\xi_h(r)}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_l^m(\vartheta, \varphi), \quad (15)$$

kde Y_l^m je sférická harmonika stupně l a řádu m , můžeme také eulerovské poruchy vyjádřit ve sférických harmonikách:

$$(\rho_1, P_1, \Phi_1) = e^{i\omega t} [\rho_1(r), P_1(r), \Phi_1(r)] Y_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (16)$$

Perturované hydrodynamické rovnice pak po vyloučení ξ_h a ρ_1 dostanou tvar:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) - \frac{\xi_r g}{c^2} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} \right) P_1 - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} \Phi_1 = 0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d}{dr} + \frac{g}{c^2} \right) P_1 - (\omega^2 - N^2) \xi_r + \frac{d\Phi_1}{dr} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_1}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi_1 - \frac{4\pi G \rho_0}{g} N^2 \xi_r - \frac{4\pi G}{c^2} P_1 = 0, \quad (19)$$

kde $g = -\rho_0^{-1} dP_0/dr$ je gravitační zrychlení a N je *Brunt-Väisäläova frekvence* daná vztahem

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\gamma P_0} \frac{dP_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right). \quad (20)$$

Jako u každých diferenciálních rovnic i zde je třeba pro řešení doplnit okrajové podmínky. Dvě podmínky zajišťují regularitu rovnic v centru Slunce pro $r = 0$, další podmínka plyne z kontinuity perturbace gravitačního potenciálu Φ_1 a jeho gradientu na povrchu, tedy v $r = r_\odot$. A nakonec pro perturbaci tlaku na povrchu musí platit $\delta p = 0$.

Rovnice (17) až (19) musí být řešeny numericky. Netriviální řešení existují jen pro některá ω , pro vlastní frekvence problému. Poznamenejme, že se v rovnicích neobjevuje závislost na řádu m , což znamená, že pro každé l je řešení vykazuje $(2l+1)$ násobnou degeneraci. To je důsledek zanedbání rotace a dalších zdrojů anisotropie. Obvyklé je při řešení použít *Cowlingovu aproximaci*, při níž se zanedbávají variace gravitačního potenciálu. V rovnicích (17) a (18) zanedbáme člen s Φ_1 a rovnicí (19) zanedbáme celou. Numerické testy ukazují, že s použitím této aproximace se vypočtené vlastní frekvence liší jen o několik procent oproti výpočtu plného systému rovnic.

Vezmeme-li v úvahu úhlovou část vlastního problému, získáme informaci o vztahu stupně l sférické harmoniky a horizontálního vlnového čísla k_h .

$$r^2 \Delta_{\vartheta\varphi} Y_l^m = r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)_{\text{local}} Y_l^m = r^2 (k_x^2 + k_y^2) Y_l^m = r^2 k_h^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m, \quad (21)$$

tedy na slunečním povrchu, kde $r = r_\odot$

$$l(l+1) = (k_h r_\odot)^2 . \quad (22)$$

2.1 Lokální přístup

Koeficienty v rovnicích pro oscilace (N , c , g) jsou obecně závislé na hloubce v atmosféře. Přesto je ilustrativní věnovat se případu, kdy jsou tyto koeficienty konstantní (izotermální atmosféra), kdy pouze ρ_0 a P_0 závisejí na r (vykazují barometrickou stratifikaci). To je akceptovatelná aproximace v zásadě v každé hloubce atmosféry, neboť změny N , c a g jsou mnohem menší, než vlastní perturbace stavových parametrů. Pro náš případ je také rozumné předpokládat, že vertikální vlnová délka oscilací je zanedbatelná vůči r , tedy že $\xi_r/r \ll d\xi_r/dr$. Definujme

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)}{r^2} c^2 \quad (23)$$

a hledejme řešení rovnic (17) a (18) s Cowlingovou aproximací ve tvaru

$$\xi_r \sim \rho_0^{-1/2} e^{ik_r r} , \quad (24)$$

$$P_1 \sim \rho_0^{-1/2} e^{ik_r r} . \quad (25)$$

Musíme vzít ještě v úvahu, že hustotní škála,

$$H \equiv -\rho_0/(d\rho_0/dr) = \left(\frac{g}{c^2} + \frac{N^2}{g} \right)^{-1} , \quad (26)$$

je také konstantní. Řešením je pak disperzní relace

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{c^2} + S_l^2 \frac{N^2 - \omega^2}{c^2 \omega^2} , \quad (27)$$

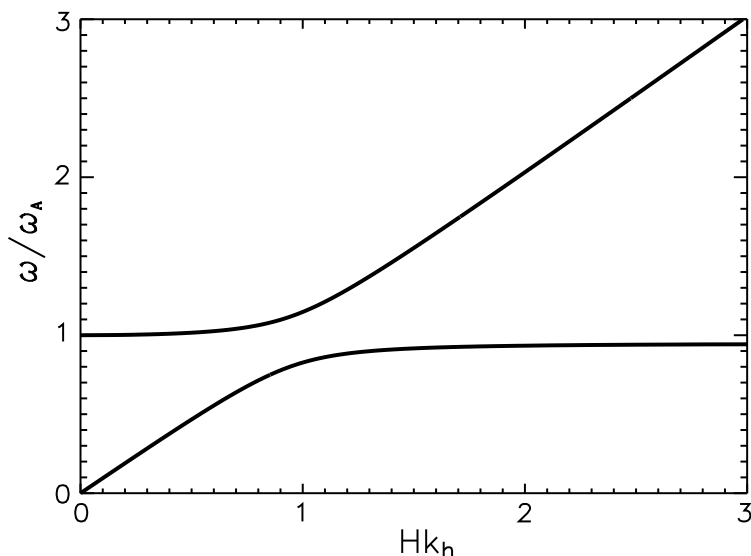
kde $\omega_A = c/(2H) = \frac{g}{2} \left(\frac{\gamma\mu}{RT} \right)^{1/2}$ je akustická hraniční (cut-off) frekvence.

Omezíme-li se na oscilace předpokládaného typu, pak musí být k_r reálné a pozitivní. Určeme nyní, pro jaké hodnoty c a ω_A mohou oscilace vůbec existovat. Hraniční meze zjistíme nastavením $k_r^2 = 0$ a rozřešením algebraické rovnice 4. řádu vůči ω . Pro ilustraci je vhodné převést disperzní relaci (27) do normalizovaných proměnných $x = 2Hk_h$, $y = \omega/\omega_A$ a hraniční křivky řešit pro $k_r = 0$. Řešením je křivka (fyzikální jsou pouze $x > 0$, $y > 0$):

$$x = \sqrt{\frac{(1-y^2)y^2}{A^2 - y^2}} , \quad (28)$$

kde $A = N/\omega_A$. V k - ω diagramu je výsledek vypočtený pro $A^2 = 0,9$ znázorněn na obr. 3. Rovina k - ω se rozdělí na tři části.

- V oblasti vysokých frekvencí ze disperzní relace (27) zjednoduší na tvar $\omega^2 = c^2(k_r^2 + k_h^2)$, v čemž lze rozpoznat disperzní relaci akustických vln. Silou odpovědnou za vznik oscilací je v tomto případě gradient tlaku – tato oblast k - ω roviny je proto oblastí výskytu p -modů oscilací. Pro $l = 0$ je $\omega = \omega_A$, zatímco pro velká l se frekvence asymptoticky blíží vztahu $\omega = ck_h$.
- Na velmi malých frekvencích a malých l se zvukové vlny nešíří. V tom případě je perioda oscilací větší, než čas nutný k tomu, aby se vzruch rozšířil do podstatné vzdálenosti a atmosféra má pak dostatek času k modifikaci hydrostatické rovnováhy vyrovnávající poruchu. Ve této oblasti k - ω roviny je tudíž $k_r^2 < 0$ a oscilace se zde utlumují.



Obr. 3: Křivky $k_r = 0$ v rovině $k-\omega$ pro $N^2/\omega_A^2 = 0,9$.

- Ve třetí, nízkofrekvenční části $k-\omega$ roviny, je k_r^2 opět kladné, takže šíření vln je možné. Pro malé ω a pevné nenulové l se disperzní relace zjednoduší na $\omega^2 = N^2 \frac{k_h^2}{k_r^2 + k_h^2} = N^2 \sin^2 \Theta$, kde Θ je úhel mezi směrem šíření a normálou. Silou odpovědnou za vznik oscilací je zde gravitace, v této oblasti se tedy šíří g -mody, jichž frekvence je závislá pouze na úhlu Θ a nemohou se šířit přesně vertikálně. Oblast interních gravitačních vln je omezena asymptotou $\omega = N$ pro velká l a $\omega = k_h c/\omega_A$ pro malá l . Brunt-Väisäläova frekvence se ukazuje jako kritická pro možnosti šíření g -vln, nutně musí být splněna podmínka $N^2 > 0$.

Pokud připustíme, že koeficienty g , c a N nejsou ve sledované vrstvě konstantní, pak bude pozice rozděločících linií v $k-\omega$ rovině záviset na hloubce v atmosféře. Pro danou frekvenci se tak může vlna šířit pouze v určité hloubce, zatímco v jiné se může utlumovat, přičemž na přechodu těchto dvou oblastí bude vlna buď odražena nebo pohlcena. Analogii lze najít v optice v totálním odrazu světla v jednom případě a částici nemající dost energie k překonání potenciálové bariéry, jejíž vlnová funkce se změní z oscilující na exponenciálně tlumenou. Pokud dvě utlumové zóny obklopují vrstvu, kde je umožněno šíření vlny na dané frekvenci, vlna zůstane ve vrstvě uvězněna. To je pravý důvod, proč je spektrum oscilací diskrétní. Obr. 4 zobrazuje průběh frekvencí ω_A^2 , N^2 a S_l^2 v závislosti na tlaku v atmosféře (tedy na hloubce v atmosféře). Z obrázku je patrné, že p -mody jsou odraženy od středu rostoucí akustickou hraniční frekvencí ω_A a k centru rostoucí frekvencí S_l . Pro daný mod l , p -mody s vyšší frekvencí jsou odraženy dále v atmosféře a také hlouběji v centru. S růstem l se při pevné frekvenci vnitřní odraz odehrává ve větších hloubkách. Pro velká ω disperzní relace (27) je přibližně $k_r^2 = (\omega^2 - S_l^2)/c^2$. Rovnost $\omega^2 = S_l^2$ definuje z (23) hloubku r_l , v níž dojde k odrazu

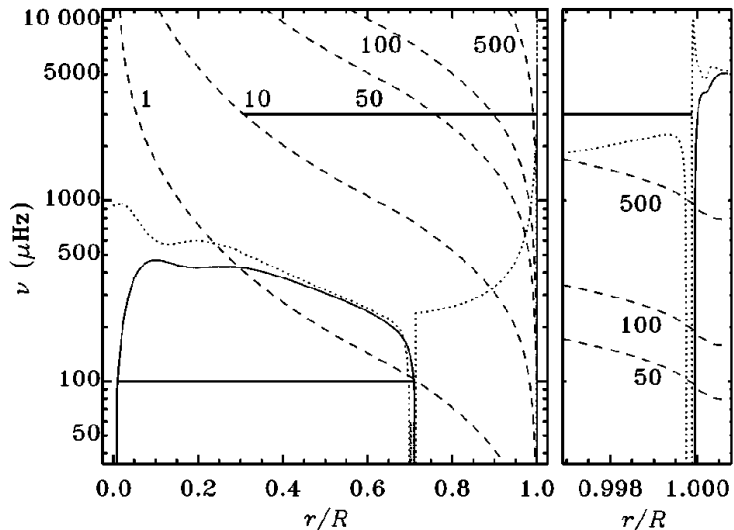
$$r_l = [l(l+1)]^{1/2} c(r_l)/\omega . \quad (29)$$

P -vlna se od povrchu pohybuje prakticky vertikálně. V hlubších vrstvách Slunce se ale postupně odklání od vertikály, protože se vlna pohybuje teplejším prostředím a tudíž rychleji. Postupně se sklánějící vektor šíření vlny se stane horizontálním v místě, kde $\omega^2 = S_l^2$. Pak se odklání zpět k povrchu, kde se opět odrazí díky existenci akustické hraniční frekvence ω_A (a potažmo existenci diskontinuity na hranici fotosféry). Pro velká l se vnitřní odraz odehrává mělko pod povrchem, pro malé l ve větších hloubkách (viz obr. 5).

S využitím znalosti stavových parametrů slunečního nitra lze rovnici (29) vyřešit jako:

$$r_l = \frac{\omega^2}{(\gamma - 1)gk_h^2} . \quad (30)$$

Obr. 4: Průběh kritických frekvencí v závislosti na r . Pevná čára symbolizuje kontury $N/2\pi$, čárkovaná průběh $\omega_A/2\pi$, tečkované kontury popsané příslušným l pak $S_l/2\pi$ pro $l = 1, 10, 50, 100$ a 500 . Tlusté horizontální čáry pak symbolizují oblasti uvěznění g-modu s frekvencí 100 mHz a p-modu s frekvencí 3000 mHz a stupněm $l = 10$. (Převzato z Christensen-Dalsgaard, 2002.)



Dlouhodobě se zachovají pouze takové oscilace, které vytvoří stojaté vlnění, ostatní se vlivem interferencí postupně utlumí. To znamená, že fázový rozdíl během jedné exkurze zvukové vlny do nitra Slunce a zpět musí být násobkem π . Pak lze psát:

$$\pi(n + \alpha) = \Delta\psi = \int_{r_l}^{r_\odot} k_r dr = \int_{r_l}^{r_\odot} \left(\frac{\omega^2 - S_l^2}{c^2} \right)^{1/2} dr = \int_{r_l}^{r_\odot} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_h^2 \right)^{1/2} dr, \quad (31)$$

α v rovnici popisuje změnu fáze v důsledku penetrace vlny do nitra a reflexe na hraniční vrstvě. Zanedbáme-li člen ω/c , neboť frekvence hledaných oscilací jsou řádově v mHz, a integrál hrubě odhadneme se zanedbáním radiální závislosti k_h , pak

$$\pi(n + \alpha) \sim k_h r_l = \frac{\omega^2}{(\gamma - 1)gk_h}. \quad (32)$$

Z toho pak vyplývá, že

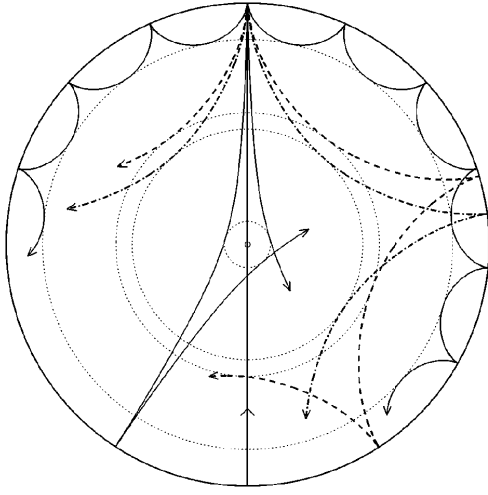
$$\omega_n^2 \sim (n + \alpha)gk_h, \quad (33)$$

což odpovídá zhruba pozorovanému spektru p -modů oscilací (viz obr. 2 vlevo), kde každý hřbet odpovídá zvukovým vlnám s jedním n a různými l .

Povrchové oscilace typu f jsou fundamentálním modem s $n = 0$, pro které platí $\nabla \cdot \xi = 0$. Dá se výpočtem ukázat, že vlastní funkce prostorové perturbace je přibližně exponenciální $\xi_r \sim \exp(k_h r)$ a jejich frekvence je nezávislá na vnitřní struktuře hvězdy. Proto mohou být f -mody identifikovány ve spektru oscilací jednoznačně bez možnosti jejich záměny s jiným modem v důsledku nejistot slunečního modelu.

3 Fyzikální interpretace oscilací

Helioseismologie je metoda využívající oscilací měřitelných ve sluneční fotosféře nebo jasu fotosférické spektrální čáry k zjišťování informací o slunečním nitru. Podobná metoda se již dávno používá v geofyzice, měření a interpretace rychlosti šíření zemětřesených vln se užívá ke studiu zemského nitra. Od roku 1960 po velkém chilském zemětřesení se ještě ke klasickým metodám přidala metoda měření tzv. *volných oscilací*, přičemž tato metoda má přímou analogii v helioseismologii (a potažmo také rozvíjející se asteroseismologii).



Obr. 5: Šíření zvukových vln v průřezu slunečního nitra. Vektory šíření jsou skláněny od vertikály rostoucí rychlostí zvuku s hloubkou, dokud se nedosáhne místa, kde je vlna odražena (tečkované kružnice). U povrchu jsou vlny odraženy rapidním poklesem hustoty. (Převzato z Christensen-Dalsgaard, 2002.)

3.1 Přímé modelování, inverze a vnitřní struktura

Přímá metoda helioseismologie začíná výpočtem slunečního modelu řešením rovnic hvězdného nitra. Z modelu plynou radiální průběhy stavových veličin, které je třeba znát při řešení rovnic (17) až (19). Jejich numerickým výpočtem získáme vlastní frekvence oscilací a také vlastní funkce, které popisují radiální závislosti perturbací ξ_r , P_1 , atd. Sluneční model však obsahuje spoustu nejistot, plynoucích např. z nepřesné znalosti stavové rovnice, nejistého chemického složení (popsané např. zastoupením prvků těžších než helium Z). Variací nejistých parametrů tak, aby se spektrum vypočtených oscilací nejvíce přiblížilo měřenému, můžeme zpřesnit parametry slunečního modelu.

Přímé modelování oscilací vyloučilo některé alternativní sluneční modely, které měly vysvětlit neutrinový problém. Takto byl vyloučen např. model s malým Z , který by snižoval centrální teplotu a tak zmenšil tok neutrin, nebo model s vnitřním promícháváním. Na hodnotu Z jsou citlivé zejména p -mody s malým l . Vysokofrekvenční p -mody jsou pro změnu citlivé na hloubku konvektivní zóny.

Celkově vzato současná helioseismologie potvrzuje platnost standardního modelu Slunce a po nedávném definitivním vyřešení neutrinového problému se dnes zdá, že standardní model nevede ve sluneční fyzice k významným rozporům.

Inverzí se obecně myslí problém nalezení integrandu daného určitého integrálu. Takový postup je v zásadě možný, pokud integrand závisí nejen na hledané funkci, ale navíc ještě na nějakém parametru, jehož je integrál sám o sobě funkcí. Jiným problémem řešitelným inverzí je například stanovení teplotního profilu atmosféry z pozorované intenzity. V případě helioseismologie si vezměme jako příklad určení průběhu rychlosti zvuku. Pro tento účel zavedme nejdříve substituci

$$u = l(l+1)/\omega^2, \quad (34)$$

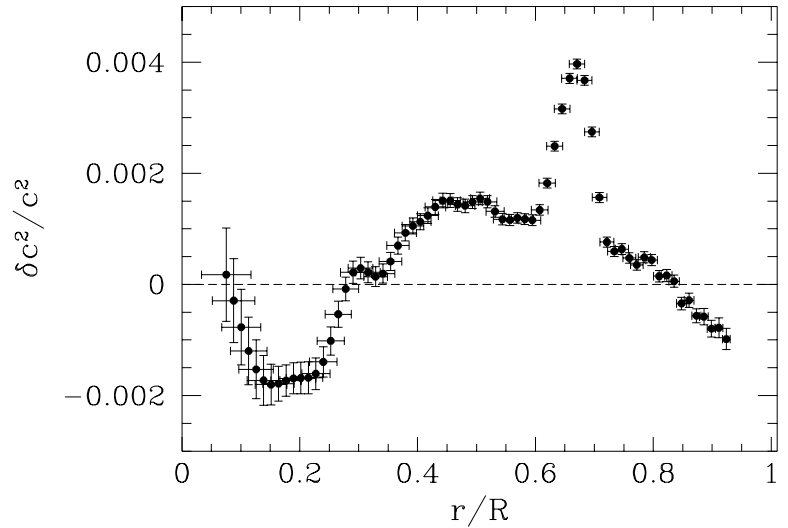
$$\xi = (r/c)^2, \quad (35)$$

a z (31) získáme

$$F(u) = \int_u^{\xi_\odot} (\xi - u)^{1/2} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\xi} d\xi, \quad (36)$$

kde $\xi_\odot = \xi(r_\odot)$. Funkce $F(u)$ je známa z pozorování (*Duvallův zákon*), u je důležitý parametr umožňující inverzi (u odpovídá frekvenci oscilací ω , zatímco ξ obsahuje hledanou funkci $c(r)$).

Obr. 6: Výsledky inverze rychlosti zvuku. Rozdíly v druhé mocnině rychlosti zvuku získané z inverze helioseismických dat a ze standardního slunečního modelu. Rozdíly kolem $0,7 R_{\odot}$ jsou způsobeny existencí dna konvekční zóny. (Převzato z Christensen-Dalsgaard, 2002.)



Diferencujeme-li (36) podle u , získáme

$$-2 \frac{dF}{du} = \int_u^{\xi_{\odot}} \frac{dG/d\xi}{(\xi - u)^{1/2}} d\xi, \quad (37)$$

kde $G = \ln r$.

Rovnice (37) má formu Abelovy integrální rovnice², jejíž řešení (inverzi) lze najít ve tvaru

$$G(\xi) - G(\xi_{\odot}) = -\frac{2}{\pi} \int_{\xi_{\odot}}^{\xi} \frac{dF/du}{(u - \xi)^{1/2}} du \quad (38)$$

a použijeme-li $G = \ln r$:

$$r = r_{\odot} \exp \left(-\frac{2}{\pi} \int_{\xi_{\odot}}^{\xi} \frac{dF/du}{(u - \xi)^{1/2}} du \right). \quad (39)$$

To je implicitní rovnice pro $\xi(r)$ a tedy $c(r)$, která může být rozřešena a tak získán průběh rychlosti zvuku v radiálním směru (viz obr. 6).

3.2 Helioseismická inverze – rotace a pohyby

Helioseismickou inverzi lze použít k výpočtu rychlostních polí, která má v sférických souřadnicích tvar:

$$\mathbf{v}_0 = (0, 0, r\Omega \sin \vartheta) \equiv \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (40)$$

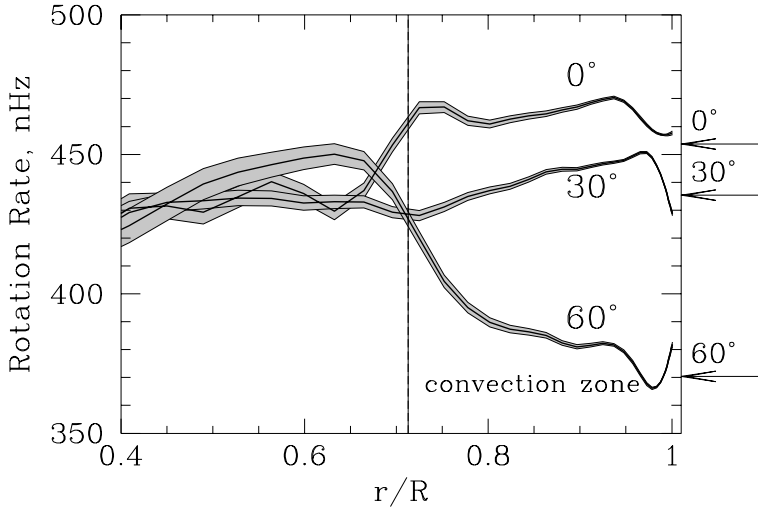
kde úhlová rychlost Ω je obecně funkcí r i ϑ a

$$\mathbf{\Omega} = (\Omega \cos \vartheta, -\Omega \sin \vartheta, 0). \quad (41)$$

Pro inverzi se hodí pohybová rovnice, k níž přidáme člen způsobený odstředivou silou. Detailnější odvození lze najít např. v Christensen-Dalsgaard (2002), omezme se zde jen na několik obecných úvah. Lze předpokládat, že rychlostní pole způsobí ovlivnění „klidové“ frekvence oscilací, měřené frekvence se bude jen málo lišit od frekvence, jaká by byla dána stavem bez rychlostního pole:

$$\omega_{nlm} = \omega_{nl0} + m \int_0^{R_{\odot}} \int_0^{\pi} K_{nlm}(r, \vartheta) \Omega(r, \vartheta) r dr d\vartheta, \quad (42)$$

²Integrální rovnice ve tvaru $\int_a^x \frac{y(t)dt}{\sqrt{x-t}} = f(x)$ má řešení $y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{f(a)}{\pi\sqrt{x-a}} + \frac{1}{\pi} \int_a^x \frac{f'(t)dt}{\sqrt{x-t}}$.



Obr. 7: Průběh rotační rychlosti s hloubkou pro tři heliografické šířky tak, jak byl získán z helioseismické inverze dat pořízených přístrojem MDI na družicové observatoři SoHO. V konvektivní zóně (do cca $0,7 R_{\odot}$) se udržuje šířková diferenciální rotace, směrem do nitra se pak rotace stává více a více rigidní s menší rychlostí, než je rotace ve fotosféře na rovníku. Jádru rotuje již prakticky jako tuhé těleso rychlostí menší rychlostí, než obal hvězdy. (Rhodes et al., 1997).

kde K_{nlm} jsou konvoluční jádra, která mohou být vypočtena na základě vlastních funkcí oscilací nerotujícího modelu. Tato jádra závisí na m^2 , takže rozštěpení frekvencí působením rotace je lichou mocninou m . Konvoluční jádra jsou symetrická vůči rovníku, z čehož vyplývá, že na rozštěp frekvencí má vliv jen symetrická část Ω .

Připustíme-li pouze radiální závislost Ω , pak odpovídající jádra nejsou závislá na m , takže rozštěpení frekvencí je přímoúměrné řádu použité sférické harmoniky m :

$$\Delta\omega_{nlm} = \omega_{nlm} - \omega_{nl0} = m\beta_{nl} \int_0^{R_{\odot}} K_{nl}(r)\Omega(r) dr, \quad (43)$$

kde $\int_0^{R_{\odot}} K_{nl} dr = 1$. Logicky jsou pro studium radiální závislosti rychlosti rotace nejzajímavější mody s $m = -l$ a $m = +l$, které reprezentují šíření vlny v prográdním a retrográdním směru, tzv. *sektorální mody*. Z rozdílu šíření vln po směru a proti směru rotace lze pak získat radiální závislost rychlosti pohybu plazmatu v hloubce dané volbou stupně modu l . Siderická rychlost je pak dána vztahem:

$$\nu_{nl} = \frac{1}{4\pi l} (\Delta\omega_{nl,-l} - \Delta\omega_{nl,+l}), \quad (44)$$

kde ν_{nl} je rotační frekvence v hloubce $r_l(l)$ dané vztahem (29).

Šířkovou závislost rotační rychlosti $\Omega(r, \vartheta)$ je třeba využít celého multipletu $2l+1$ frekvencí pro pevné r dané (29). Celou proceduru lze zjednodušit, pokud popíšeme závislost rotační rychlosti na šířce pomocí rozkladu do Legendreových polynomů P_i :

$$\Delta\omega_{nlm} = 2\pi l(l+1) \sum_i a_i P_i(-m/l(l+1)). \quad (45)$$

Tímto přístupem lze potvrdit diferenciální rotaci, která je jinak známa i z jiných typů pozorování. Výsledky helioseismické studie jsou zobrazeny na obr. 7.

4 Lokální helioseismologie

Až doposud jsme se zabývali globálními oscilacemi, vznikajícími interferencí různých zvukových nebo gravitačních vln cestujících nitrem Slunce. Přestože mají globální oscilace vysokou odpovídající hodnotu, nejsou schopny poskytnout detailnější informaci – jsou zprůměrovány přes všechny heliografické délky, poruchy, na které jsou schopny globální oscilace reagovat, musí být symetrické vůči rovníku, není zcela jasné, jak (a jestli vůbec) reagují na nehomogenity, jakými jsou například aktivní magnetické oblasti.

Naštěstí existují metody, které umožňují získat informace o slunečním nitru s vyšším rozlišením a bez předpokladů na nejrůznější symetrie hledaných poruch. Je nasnadě, že pole vln v určité oblasti sledované oblasti povrchu je ovlivněno poruchami a nehomogenitami nacházejícími se mezi povrchem a bodem obratu dané vlny. Jejich analýzou lze získat trojrozměrnou informaci o struktuře nitra pod povrchem sledované oblasti. Například magnetické pole akustické vlny částečně pohlcuje a částečně rozptyluje, existence rychlostní pole ovlivní celkovou rychlost šíření vlny v souřadnicové soustavě spojené se Sluncem. V současnosti existují v zásadě dvě metody používané v lokální helioseismologii, obě mají ale jeden zásadní nedostatek – na rozdíl od globální oscilací je prakticky nemožné zkonstruovat *přímou úlohu*. Nelze zatím určit, jaké bude výsledné spektrum vstupujících vln při dané známé trojrozměrné struktuře podpovrchových oblastí. Z tohoto důvodu je *obrácená úloha* – tedy modelování topologie a polohy poruch z měřeného spektra vln v některých případech obtížná a nejednoznačná. Také prozatím není známo příliš mnoho informací o limitech obou metod a chybách, s nimiž poskytují své výsledky.

4.1 Ring-diagram

Metoda ring-diagram je zřejmě první lokálním přístupem k helioseismologii a je použitelná především na mapování pohybového pole v podpovrchových vrstvách. Metoda vychází z předpokladu, že frekvence oscilací budou ovlivněny lokálním rychlostním polem díky odnosu celého vlnového obrazce s prostředím, v němž se šíří – vůči souřadnicovému systému pevně spojenému se Sluncem se tak vlastně mění efektivní rychlost zvuku. Praktický přístup spočívá v rozkladu spektra oscilací ve sledované oblasti povrchu do frekvencí a vlnových čísel, čili převodu z (t, x, y) do (ω, k_x, k_y) prostoru. Výsledné výkonové spektrum má v trojrozměrném Fourierově prostoru tvar trumpetoidních ploch, jako když k - ω diagram zobrazený na obr. 2 vlevo roztočíme kolem frekvenční osy. Praktický výpočet podpovrchových toků spočívá v analýze řezu 3-D obrazce ve Fourierově prostoru v konstantní frekvenci. Takové řezy mají tvar množiny prstenců, přičemž každý z nich odpovídá jednomu hřbetu v k - ω diagramu a tedy jednomu radiálnímu číslu n . Podpovrchové rychlostní pole pak může být odvozeno z posunu středů jednotlivých prstenců vůči počátku souřadnic. Různou volbou prstenců a frekvencí pak dosáhneme inverzní techniky použitelné k mapování trojrozměrných rychlostních polí nacházejících se pod povrchem sledované oblasti. Výsledky pro jednu oblast jsou horizontálně zprůměrovány, čili je praktické rozdělit sluneční povrch na více oblastí a v každé provést ring-diagram analýzu zvlášť. Velikostí zvolené oblasti je dáno rozlišení výsledků v horizontální rovině, avšak ze zřejmých důvodů není možné oblast libovolně zmenšovat.

I přes popsání limity bylo touto metodou získáno velké množství informací zejména o velkoškálových pohybech, jakým je například meridionální cirkulace a její vývoj v závislosti na fázi slunečního magnetického cyklu, nebo informace o severo-jížní asymetrii sluneční diferenciální rotace.

4.2 Time-distance

Zcela odlišnou metodou, blízkou spíše klasickému pojetí analýzy zemětřesných vln v geofyzice, je metoda time-distance. Ta spočívá v měření času, která potřebuje zemětřesná vlna k překonání vzdálenosti mezi hypocentrem a měřicí aparaturou. Cestovní čas je integrálem rychlosti vlny podél trajektorie jejího šíření. Máme-li k dispozici podobných měření více, můžeme získat koherentní obraz o oblasti, jejímž studiem se zabýváme. Ve slunečním případě je komplikací fakt, že zdroje zvukových vln nejsou ostře ohraničené a ojedinělé – vlny vznikají prakticky stochasticky a na všech možných místech při konvekci v podpovrchových částech slunečního nitra. Nicméně již první studie ukázaly, že podobná informace může být získána s pomocí vhodné korelační analýzy vlnového pole pozorovaného na slunečním povrchu – čas, který maximalizuje korelaci mezi dvěma prostorově odlišnými body je ekvivalentní cestovnímu času vlny mezi těmito dvěma místy. Cestovní čas vlny podél křivky Γ můžeme aproximovat

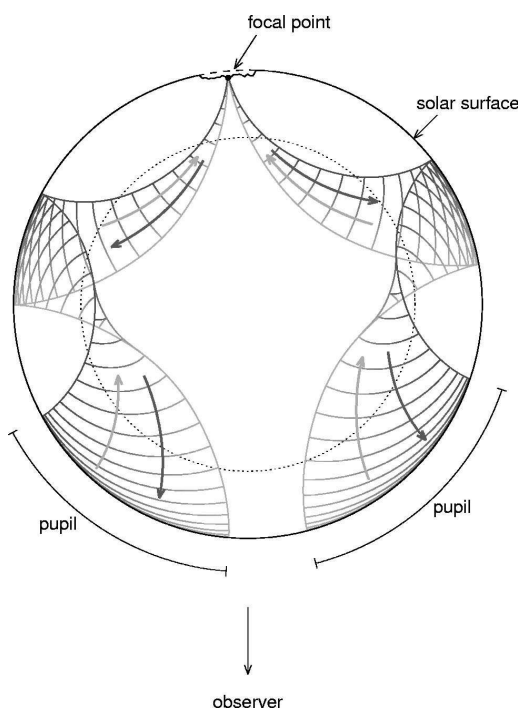
vztahem

$$\tau(t) = \int_{\Gamma} \frac{ds}{c_w(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}}, \quad (46)$$

kde s je vzdálenost podél trajektorie šíření, \mathbf{r} je prostorová souřadnice, c_w je lokální grupová rychlost vlny, \mathbf{v} je lokální vektorové rychlostí pole a \mathbf{n} je směrový vektor šíření sledované vlny. Ve vztahu je explicitně uvedena očekávaná závislost veličin na čase. Grupová rychlost vlny je převážně dána rychlostí šíření zvuku ve stejném prostředí, ale může být od rychlosti zvuku odlišná např. díky přítomnosti magnetických polí. Měříme-li cestovní čas pro dostatečné množství různých vln, může být vztah (46) invertován a určeny tak $c_w(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Prakticky je korelace prováděna mezi nějakým centrálním bodem a jeho okolím ležícím ve stejné vzdálenosti od centrálního bodu. Problematika celé inverze může být samozřejmě řešena opět pomocí vhodných konvolučních jader, které mohou obejít aproximaci paprskem použitou ve vztahu (46). Výhodou time-distance analýzy oproti ring-diagramu je možnost většího prostorového rozlišení v horizontálních směrech (v současnosti jsou skupinou S. Kosovicheva získávány informace s rozlišením kolem 5 Mm). S pomocí této slibně se rozvíjející metody bylo získáno velké množství důležitých výsledků objasňujících chování plazmatu ve slunečním nitru.

Technikou velmi blízkou time-distance metodě je **helioseismické holografie**. Metoda využívá koherentní kombinace vlnového pole p -modů, přičemž se bere v úvahu zejména fázová informace, k rekonstrukci polohy, v níž se nacházejí útvary, které způsobují rozptyl nebo absorpci vln. Tímto principem lze mapovat například přítomnost magnetických polí na odvrácené sluneční polokouli. Vlny vznikající na odvrácené straně jsou registrovány na přivrácené (v oblasti na obr. 8 označené jako „pupil“), v okamžiku registrace prodělaly nejméně jeden odraz o povrchovou diskontinuitu. Využitím vhodné metody je možné soustředit se na specifickou oblast na odvrácené polokouli. Promapujeme-li různé malé oblasti na odvrácené straně, můžeme ve výsledcích zaregistrovat oblasti, v nichž došlo k fázovým změnám vln díky přítomnosti podfotosférického magnetického pole – oproti okolí jsou informace fázově posunuty. Zkušenost ukazuje, že mezi velikostí fázového posuvu a intenzitou magnetického pole existuje přímá souvislost a tak lze fázové posunutí použít k mapování stavu magnetických polí na celé odvrácené polokouli a tak přispět k střednědobým předpovědím sluneční aktivity.



Obr. 8: Princip helioseismické holografie – zobrazování aktivních oblastí nacházejících se na odvrácené straně Slunce. Obrázek znázorňuje šíření vln od studovaného bodu (*focal point*) na odvrácené straně na stranu přivrácenou. Vlny s různým l se promítanou na přivrácené straně do oblasti označené jako *pupil*. Převzato z Christensen-Dalsgaard (2002).

Helioseismologie je slibně se rozvíjející metodou výzkumu fyzikální podstaty Slunce. Její výsledky a zkušenosti získané při studiu Slunce zjednodušují vývoj obdobné metody týkající se jiných hvězd – *asteroseismologie*.

Poděkování: Tato práce byla realizována v rámci grantového projektu 205/03/H144 poskytnutém Grantovou agenturou České republiky jako studijní text pro postgraduální studenty MFF UK.

Literatura:

- Christensen-Dalsgaard, J.: 2002, Rev. Mod. Phys., 74(4), 1073–1129
Foukal, P. V.: 2004, Solar Astrophysics, 2nd edition, Wiley-VCH, 480 pages
Leighton, R. B., Noyes, R. W., & Simon, G. W.: 1962, Astrophys. J., 135, 474–509
Rhodes, E. J., Kosovichev, A. G. et al.: 1997, Sol. Phys., 175, 287–310
Stix, M.: 1989, The Sun: An Introduction, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 390 pages
Švanda, M.: 2004, Horizontální proudění hmoty ve sluneční fotosféře, diplomová práce, MFF UK Praha, 81 str.