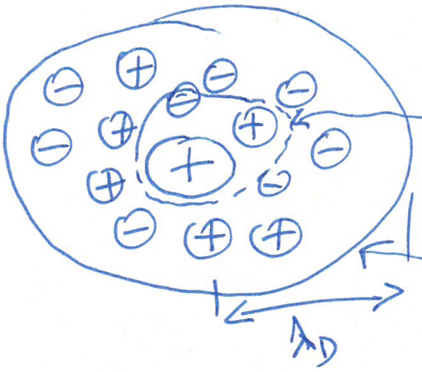
Plazma

– kvazineutrální plyn obsahující nabité částice vykazující kolektivní chování

kolektivní chování – elmag. interakce dalekodosahová
⇒ chování každé částice se promítá do celého souboru

$F_E \sim \frac{1}{r^2}$, ale objem s $1/r^3$

kvazineutrální – ~~ne~~ od nějaké škály je systém elektricky neutrální
– škála λ_D
– Debyeovská délka



na této škále ještě vidím náboj

na této už ne

model – 1D

Poisson: $$\Delta \varphi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

! diverguje, tedy škály větší než mikroskop., ale pořád malé

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = -\frac{e(n_i - n_e)}{\varepsilon_0}$$

i … ionty
e … elektrony

$\varphi \Rightarrow$ potenciál el. pole $\quad V = -e\varphi = q\varphi$

v rovnováze $\rightsquigarrow$ M–B rozdělení pro elektrony

$$f(v) = A \exp\left[-\frac{\frac{1}{2}mv^2 + q\varphi}{k_B T_e}\right]$$

závislost na rychlosti nezajímavá, hledáme závislost $n_e = n_e(\varphi)$

$$n_e(\varphi) = \int_0^\infty f(v)\,dv = \exp\left[-\frac{q\varphi}{k_B T_e}\right] \underbrace{\int_0^\infty A \exp\left[-\frac{\frac{1}{2}mv^2}{k_B T_e}\right]}_{n_0}$$

Boltzmannův vztah

$$\Rightarrow n_e(\varphi) = n_0 \exp\left[-\frac{q\varphi}{k_B T_e}\right] = n_e \exp\left[\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right]$$

Taylor:

$$n_e = n_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) \rightarrow (n_e - n_0) = n_0 \frac{e\varphi}{k_B T_e}$$

do Poissonovy: při $n_0 = n_i$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}} = -\frac{e(n_i - n_e)}{\varepsilon_0} = \underbrace{n_0 \frac{e^2 \varphi}{\varepsilon_0 k_B T_e}}$$

řešení: ~~φ~~ $\varphi = \varphi_0 e^{-\frac{x}{\lambda_D}}$

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}}$$

$\Rightarrow$ koncentrace elektronů tak, aby byl „vložený" náboj exponenciálně tlumen

fyzika: $\lambda_D \nearrow T$, $\lambda_D \searrow n_0$

Poznámky: teplota – míra šířky rozdělení

$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = k_B T$

$\Rightarrow 1\,eV = 11600\,K \ (\cdot k_B)$

- $\rightarrow$ plazma může mít více teplot
  frekvence kolizí i–i a e–e jsou vyšší než frekvence i–e
- $\rightarrow$ rychlostní rozdělení nemusí být izotropní! (např. mg. pole)
- $\rightarrow$ různé hustoty

meziplanetární	$10^6\ m^{-3}$
molekulová oblaka	$10^8\ m^{-3}$
fotosféra $\odot$	$10^{22}\ m^{-3}$
jádro $\odot$	$10^{31}\ m^{-3}$
laboratoř fúze	$10^{20} - 10^{28}\ m^{-3}$

→ různé přístupy
→ kinetický (na úrovni Boltzmannovy rce)
→ fluidní (fluidní rce, MHD)
→ driftový (testovací částice)
→ hledání vln, stability, ...

→ „kritéria pro plazma"

1. systém větší než Debye ; $L \gg \lambda_D$
→ kvazineutralita

2. stínění efektivní. V Debyeově sféře hodně částic ; $N_D \gg 1$
pokud ne, asi vázaný systém

3. interakce dominovány elmag. silami a ne kolizemi ; $\omega\tau > 1$
ω ... frekvence oscilací plazmatu
τ ... střední čas mezi srážkami

př. jet exhaust není plazma

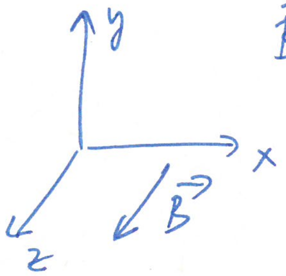
Driftový popis

- studium pohybu testovací částice v zadaných (!) E, B polích
- nejjednodušší, ale popisuje char. chování
- důležité např. pro studium nestabilit
- zpětná vazba se neuvažuje

řešíme: $$m \frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = q\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right]$$

- volbou $\vec{E}(\vec{r},t)$ a $\vec{B}(\vec{r},t)$ studujeme charakteristické případy
(chovají se tak všechny částice → makroskopický efekt)

Homogenní magnetické pole



$$\vec{B} = B_0\,\hat{z}\,,\quad \vec{E} = 0$$

$$m\begin{pmatrix}\dot v_x\\ \dot v_y\\ \dot v_z\end{pmatrix} = q\left[\begin{pmatrix} v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ 0\\ B\end{pmatrix}\right]$$

složky

$$m\dot v_x = qBv_y$$
$$m\dot v_y = -qBv_x$$
$$m\dot v_z = 0 \longrightarrow v_z = \text{konst}$$

kolmé diferencujeme:

$$\ddot v_x = +\left(\frac{q}{m}\right)B\dot v_y\ ;\quad \ddot v_y = -\left(\frac{q}{m}\right)B\dot v_x$$

$$\left.\begin{aligned}\ddot v_x &= \left(\frac{q}{m}\right)B\left(-\frac{q}{m}\right)Bv_x \Rightarrow \ddot v_x = -\left(\frac{q}{m}B\right)^2 v_x\\ \ddot v_y &= -\left(\frac{q}{m}\right)B\left(\frac{q}{m}B\right)v_y \Rightarrow \ddot v_y = -\left(\frac{q}{m}B\right)^2 v_y\end{aligned}\right\}\ \text{řešení harmonické}$$

$$\omega_c \equiv \frac{|q|B}{m} = \frac{q\,\mathrm{sgn}\,q\,B}{m}$$ cyklotronová frekvence

řešení: $v_{x,y} = v_\perp \exp\left(i\omega_c t + i\delta_{x,y}\right)$

zvolme: $\delta_x = 0 \Rightarrow v_x = v_\perp \exp(i\omega_c t)$

pouze reálná část má fyz. význam

$$v_y = \frac{m}{qB}\dot v_x = \frac{m}{qB} v_\perp\, i\omega_c\, e^{i\omega_c t} = \frac{m}{qB} v_\perp\, i\, \frac{qB\,\mathrm{sgn}\,q}{m}\, e^{i\omega_c t} = v_\perp\, i\,\mathrm{sgn}\,q\; e^{i\omega_c t}$$

$v_\perp$?

$$\left.\begin{aligned} m\dot v_x v_x &= qBv_yv_x\\ m\dot v_y v_y &= -qBv_xv_y\end{aligned}\right\}+ \Rightarrow m\dot v_x v_x + m\dot v_y v_y = 0 = \frac12 m\left(v_x^2\right)^{\cdot} + \frac12 m\left(v_y^2\right)^{\cdot} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv_\perp^2}{dt} = 0$$

integrujeme trajektorii

$v_x = \dot{x} \rightarrow \dot{x} = v_\perp e^{i\omega_c t}$

$$x - x_0 = -i \frac{v_\perp}{\omega_c} e^{i\omega_c t} \qquad \text{reálná část}$$

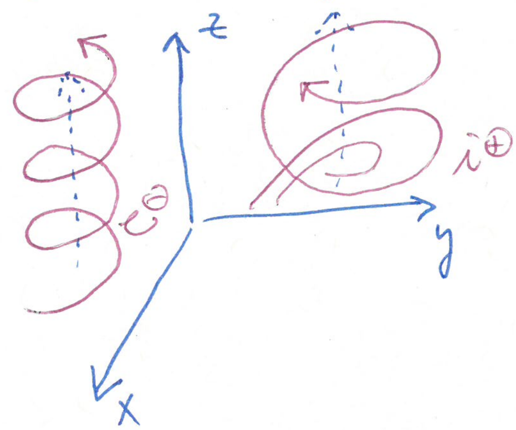
$$\Re(x - x_0) = \Re\left(-i \frac{v_\perp}{\omega_c} e^{i\omega_c t}\right) = \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin \omega_c t$$

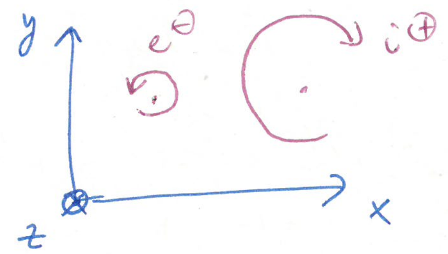
$$v_y = \dot{y} \rightarrow \Re(y - y_0) = \Re\left(\frac{v_\perp}{\omega_c}\, \mathrm{sgn}\, q \exp i\omega_c t\right) =$$

$$= \frac{v_\perp}{\omega_c}\, \mathrm{sgn}\, q \cos \omega_c t$$

$$\dot{v}_z = 0 \rightarrow z - z_0 = v_\parallel t$$

Larmorův poloměr $\quad r_L \equiv \dfrac{v_\perp}{\omega_c} = \dfrac{v_\perp m}{q\, \mathrm{sgn}\, q\, B}$





vybuzení ~~ch~~ mg. pole proti původnímu

$\rightarrow$ plazma diamagnetické

$\boxed{\text{+ Homogenní elektrické pole}}$

$$B = B_0 \hat{z} \; ; \; E = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \quad \text{volba}$$

$$m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = q \left[\begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \right]$$

podélný směr: $\dot{v}_z = \dfrac{q}{m} E_z \Rightarrow z = \dfrac{q}{2m} E_z t^2 + v_{z0} t$

akcelerace v $\vec{z}$

kolmé složky: využijeme předchozí řešení

$$\dot{v}_x = \frac{q}{m} E_x + \omega_c \,\mathrm{sgn}\, q \, v_y$$

$$\dot{v}_y = -\mathrm{sgn}\, q \, \omega_c v_x$$

diferencujeme

$$\omega_c \equiv \frac{q\, \mathrm{sgn}\, q\, B}{m}$$

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x$$

$$\ddot{v}_y = -\mathrm{sgn}\, q \, \omega_c \left(\frac{q}{m} E_x + \mathrm{sgn}\, q \, \omega_c v_y \right) =$$

$$= -\omega_c^2 \left(\frac{E_x}{B} + v_y \right)$$

pro $\left(v_y + \frac{E_x}{B} \right)^{\cdot\cdot} = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right)$ řešení jako předchozí

$$\Rightarrow v_x = v_\perp e^{i\omega_c t}$$

$$v_y = \mathrm{sgn}\, q \, i \, v_\perp e^{i\omega_c t} \underbrace{- \frac{E_x}{B}}_{\text{drift!}}$$

pozor E_x, ale drift v $\vec{y}$!

$-\frac{E_x}{B}$ vypadá jako y-složka $\frac{E \times B}{B^2}$

vektorově: $m\dot{\vec{v}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$

volíme: $v' = v - \frac{E \times B}{B^2} \Rightarrow v = v' + \frac{E \times B}{B^2}$

tedy: $m\dot{v} = m\dot{v}' = q\left(E + v' \times B + \frac{E \times B}{B^2} \times B\right) =$

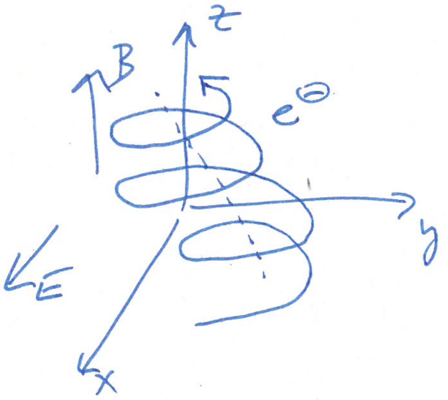
$$= q\left[E + v' \times B - \frac{1}{B^2}\vec{E} B^2 + \frac{1}{B^2} \vec{B} (E \cdot B)\right] =$$

$$= q\left[E + v' \times B - E + \underbrace{\frac{E \cdot B}{B}}_{E_\parallel} \frac{\vec{B}}{B}\right] =$$

($\vec{E}$ ve směru $\vec{B}$)

$= q\left[E_\parallel + v' \times B\right]$ ~ úloha separovaná, řešitelná jako předchozí. Pak transformace zpět a máme drift „gyračního středu"

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2} \quad ; \quad \text{nezávisí na znaménku}$$



pozn. E-B drift důsledkem relativistické transformace TEM → skripta!

$$v_E = (1+\beta^2)\,\frac{E\times B}{\frac{E^2}{c^2}+B^2}$$

Zobecnění

$$v_{gs} = \frac{E\times B}{B^2} = \left|\,F_e = qE\,\right| = \frac{1}{q}\,\frac{F_e\times B}{B^2}$$

zobecníme pro lib. sílu nezávislou na rychlosti a poloze

$$v_{\vec{F}} = \frac{1}{q}\,\frac{\vec{F}\times\vec{B}}{B^2}$$

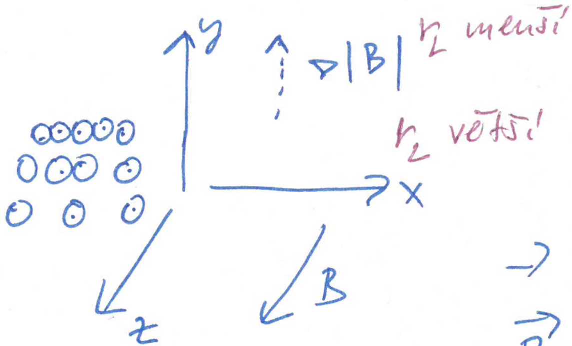
př. $\vec{F}_g = m\vec{g} \Rightarrow \vec{v}_{\vec{g}} = \frac{m}{q}\,\frac{\vec{g}\times\vec{B}}{B^2}$ gravitační drift

$$\vec{F}_0 = \frac{m v_{\parallel}^2}{R^2}\vec{R} \Rightarrow \vec{v}_0 \stackrel{?}{=} \frac{m v_{\parallel}^2}{qR^2B^2}\,\vec{R}\times\vec{B}$$

pozor! není homogenní! třeba korekci na změnu $\vec{B}$!

další příklady → hledáme výraz pro „přídatnou" sílu a dosazujeme

Nehomogenní magnetické pole



$\vec{B} = B(y)\hat{z}$ pomalá změna!

$\nabla|B| \sim \frac{|B|}{L}$, pak $\frac{r_L}{L} \ll 1$ podmínka

→ můžeme rozvíjet

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\boxed{r_L \equiv \frac{m v_\perp}{q\,\mathrm{sgn}\,q\,B}}$$

pro nás: $B_z = B_0 + y\frac{\partial B_z}{\partial y}$

rozdíly v lokální hodnotě r_L v rámci jedné orbity → drift, asi ve směru $\perp \vec{B} \perp \nabla|B|$

Lorentz: $F_y = -q v_x B_z = -q v_x \left(B_0 + y\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)$

Larmorova rotace

„přídatná" síla

aproximace: ① změny pole pomalé ⇒ vystředujeme přes rychlý děj → Larmorovu rotaci

② korekce malé ⇒ vložíme neporušené řešení

$$F_y = -q v_x \left(B_0 + y\frac{\partial B_z}{\partial y}\right) = -q v_\perp \cos\omega_c t \left(B_0 + r_L\,\mathrm{sgn}\,q \cdot \cos\omega_c t\,\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)$$

vložíme neporušené

$$\langle F_y\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_y \, d(\omega_c t) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{q v_\perp \cos\omega_c t \,(B_0}_{\langle \sin\omega_c t\rangle = 0} + r_L\,\mathrm{sgn}\,q \cos\omega_c t\,\frac{\partial B_z}{\partial y}\Big) d(\omega_c t) =$$

$$= -q v_\perp r_L\,\mathrm{sgn}\,q\,\frac{\partial B_z}{\partial y}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\omega_c t \, d(\omega_c t) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,q\, v_\perp r_L q\,\frac{\partial B_z}{\partial y}$$

zobecnění:

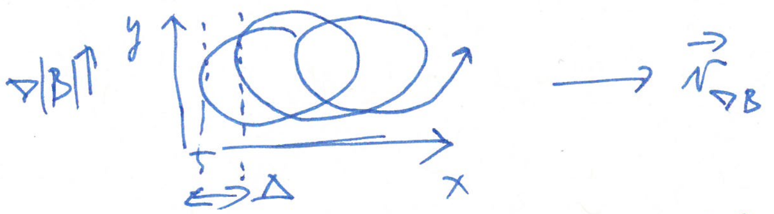
$$\langle F_x \rangle = 0 \; ; \quad \langle F_z \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = -\frac{1}{2}\, q \,\mathrm{sgn}\, q\; v_\perp r_L\, \nabla |B|$$

do vzorečku pro obecnou sílu:

$$\boxed{\vec{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\, q\; v_\perp r_L\, \frac{\vec{B} \times \nabla |B|}{B^2}}$$

závisí na náboji!



→ kontrola předpokladů

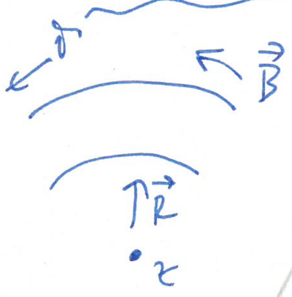
$$\Delta = \tau\, |\vec{v}_{\nabla B}| = \frac{2\pi}{\omega_c}\, \frac{1}{2}\, v_\perp r_L \frac{|\nabla |B||}{|B|} = \pi r_L \left(\frac{r_L}{L}\right) \ll r_L$$

$$\frac{r_L}{L} \ll 1$$

⇒ řešení konzistentní s předpoklady!

---

zpět k odstředivé síle → drift v zakřiveném mg. poli



v cylindrických a vakuu

$$\nabla \times B = \mu_0 j = 0$$

B jen složka ϑ, $\nabla |B|$ složka R

$$\Rightarrow \nabla \times B = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R B_\vartheta) = 0 \Rightarrow B_\vartheta = \frac{c}{R}$$

$$\nabla B = \frac{\partial}{\partial R}\frac{c}{R} = -\frac{c}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{|B|}{R^2}\vec{R}$$

$$v_{\nabla B} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\, q\, \frac{v_\perp r_L}{B^2}\, B \times |B| \frac{\vec{R}}{R^2} = -\frac{1}{2}\frac{m v_\perp^2}{q B^2 R^2}\, \vec{B} \times \vec{R}$$

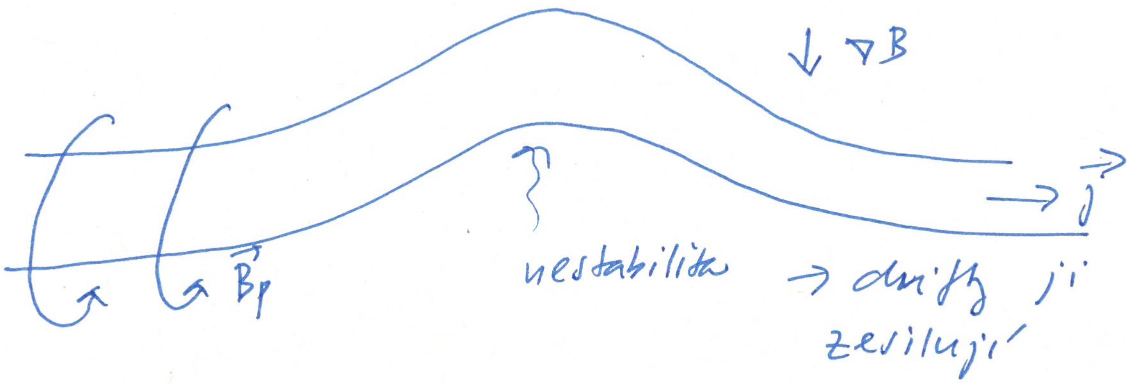
přidáme drift v poli odstředivé síly:

$$v_0 = \frac{m v_{\parallel}^2}{q R^2 B^2} \vec{R} \times \vec{B}$$

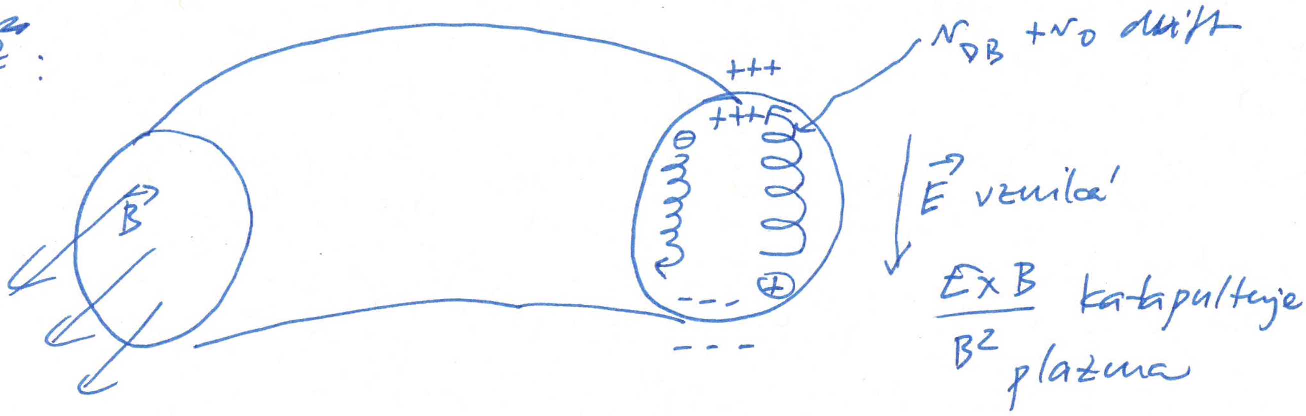
$\Rightarrow$ celkově: $\vec{v}_{gc} = \vec{v}_{\nabla B} + \vec{v}_0 = \frac{m}{q} \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{R^2 B^2} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right)$

pozor! sčítají se $\rightarrow$ zakřiveným polem nelze plazma udržet

původce „kink" nestability

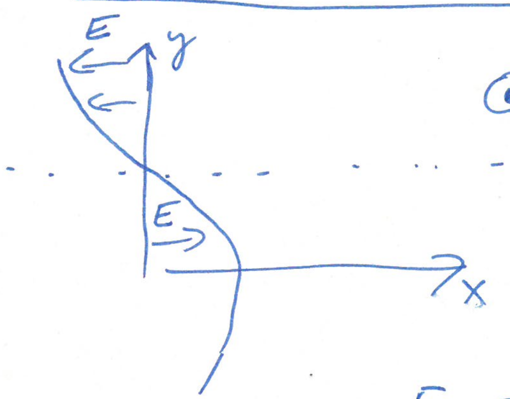


řez:



pozn. pokud je pole šroubovice
$\rightarrow$ lze drifty vystředovat
$\rightarrow$ tokamak

Nehomogenní E pole



$\odot \vec{B}, \vec{z}$

model, $\vec{E} = E_0 \cos(ky)\, \vec{x}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$

char. rozměr poruchy

poruche jako vlna

$$m\dot{v} = q\left[E(y) + v \times B\right]$$

$$\dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y + \frac{q}{m} E_x(y) \;;\quad \dot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_x$$

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x + \omega_c \,\mathrm{sgn}\, q \frac{\dot{E}_x(y)}{B}$$

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y - \omega_c^2 \frac{E_x(y)}{B}$$

nejde řešit → potřebujeme ~~zadat~~ E, ale v něm je řešení → problém

aproximace: ~~[illegible]~~ E malé

použijeme nepoměněný orbit a hledáme korekci

$$y = y_0 + r_L \,\mathrm{sgn}\, q \cos \omega_c t$$

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y - \omega_c^2 \frac{E_0}{B} \cos\left[k(y_0 + r_L \,\mathrm{sgn}\, q \cos\omega_c t)\right]$$

průměrujeme

$$\langle \ddot{v}_y \rangle = -\omega_c^2 \langle v_y \rangle - \omega_c^2 \frac{E_0}{B} \left\langle \cos\left[k(y_0 + r_L \,\mathrm{sgn}\, q \cos\omega_c t)\right]\right\rangle$$

$$\langle \ddot{v}_y \rangle = 0$$

osciluje, nečekáme sekulární vývoj v čase pro cos:

$$\cos\{k(y_0 + \operatorname{sgn} q\, r_L \cos\omega_c t) =$$

$$= \cos ky_0 \cos(k r_L \operatorname{sgn} q \cos\omega_c t) - \sin ky_0 \sin(k r_L \operatorname{sgn} q \cos\omega_c t) =$$

$$= \cos ky_0 \cos(k r_L \cos\omega_c t) - \operatorname{sgn} q \sin ky_0 \sin(k r_L \cos\omega_c t) =$$

| pro $k r_L \ll 1$ $\quad \cos\epsilon \sim 1 - 1/2\,\epsilon^2$, $\sin\epsilon \sim \epsilon$ |

$$= \cos ky_0 \left(1 - \frac{1}{2} k^2 r_L^2 \cos^2\omega_c t\right) - \operatorname{sgn} q \sin ky_0\, k r_L \cos\omega_c t$$

vracíme:

$$\langle v_y \rangle = -\frac{E_0}{B} \left\langle \cos ky_0 \left(1 - \frac{1}{2} k^2 r_L^2 \cos^2\omega_c t\right) - \underbrace{\operatorname{sgn} q \sin ky_0\, \cancel{k r_L} \cos\omega_c t}_{\to 0 \text{ po průměru}} \right\rangle =$$

$$= -\frac{E_0}{B} \cos ky_0 \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2\right) =$$

$$= -\frac{E_x(y)}{B} \left(1 - 1/4\, k^2 r_L^2\right)$$

zobecníme: $\vec{v}_E = \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \left(1 - 1/4\, k^2 r_L^2\right)$

ve Fourierově doméně nahlédneme, že

$$\nabla^2 \to i^2 k^2$$

ještě zobecníme: $v_E = \left(1 + 1/4\, r_L^2 \Delta_E\right) \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} =$

$$= -\frac{\vec{B} \times}{B^2} \left(1 + \underbrace{1/4\, r_L^2 \Delta}_{\text{efekt konečného Larmorova poloměru}}\right) \vec{E}$$

r_L větší pro ionty ⇒ ionty „cítí" změny E-pole více než elektrony

→ když se objeví E-pole → driftová nestabilita

efekt nehom. E-pole větší a roste ($\propto (k r_L)^2$) než nehom. mg. pole ($\propto k r_L$)

→ driftové proudy