Vlny v plazmatu

- hledáme periodické (oscilující) řešení
- netriviální – komplexní problém

↳ zjednodušení: <u>lineární vlny</u>

<u>Linearizace</u>: veličina = pozadí + porucha

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

<u>pozadí</u>: automaticky splňuje rovnice problému
⇝ použijeme tekutinovou approximaci
→ proměnná 0. řádu

<u>porucha</u>: proměnná 1. řádu
malá ve srovnání s pozadím $\rho_1 \ll \rho_0$
průměrováním vymizí $\langle \rho_1 \rangle = 0$

→ totéž pro derivace

<u>linearizace</u> – porucha · porucha = proměnná 2. řádu

– v rovnicích ponecháme jen členy do 1. řádu

<u>Notace</u>: fluidní rovnice $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}$ (1) ↖ fluktuace

rychlost, střední rychlost

ALE

nyní: $\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{w}_1$ (2) ↖ fluktuace

rychlost, pozadí

je $\vec{w}$ z (1) totéž jako $\vec{w}$ z (2)?

ANO

Takže příklad:

Zvukové vlny v tekutině

kontinuita $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w}) = 0$

pohyb $\quad \rho \left[\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} \right] = -\nabla p = -\frac{\partial p}{\rho} \nabla \rho$

stavová rovnice adiabatická

Setup:
- → hydrodynamika pouze $\quad E = B = 0$
- → bez viskozity
- → $w_0 = 0$
- → homogenní pozadí

Linearizace: rce kont.

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\rho_0 + \rho_1)(\vec{w}_0 + \vec{w}_1) \right] = 0$$

$$0 = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{w}_0) + \rho_0 \nabla \cdot \vec{w}_1 + \vec{w}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{w}_0 + \vec{w}_0 \cdot \nabla \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{w}_1)$$

pozadí = 0 $\qquad$ homogenní pozadí $\nabla \rho_0 = 0$ $\qquad$ $w_0 = 0$ $\qquad$ 2. řád

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{w}_1 = 0 \qquad (a)$$

podobně Eulerova rce $\quad \rho_0 \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} = -\partial \frac{p_0}{\rho_0} \nabla \rho_1 \qquad (b)$

(a) a (b) řešíme

→ hledáme oscilující řešení, pak ansatz rovinná vlna

$$A = \tilde{A} \exp\left[i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right]$$

do splní

Dva pohledy: 1) hledáme řešení ve Fourierově prostoru

2) hledáme řešení jako superpozici modů (unikátní kombinace $\vec{k}$ a ω)

výhoda: diferenciální operátory → algebraické

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \rightarrow -\omega i \cdot, \quad \nabla \cdot \rightarrow i\vec{k} \cdot, \quad \Delta \cdot \rightarrow -k^2 \cdot$$

co chceme? hledáme disperzní relaci

$$D(\vec{k}, \omega) = 0$$ ← vazba mezi k a ω
← popis daného modu

náš případ:

(a) → $-i\omega \rho_1 + i\rho_0 \vec{k}\, i\vec{w}_1 = 0$

(b) → $-i\omega \rho_0 \vec{w}_1 + i\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \vec{k} \rho_1 = 0$

zvolme $k \parallel w_1$

$-\cancel{i}\omega \rho_1 + \cancel{i} \rho_0 k w_1 = 0$; $-\cancel{i}\omega \rho_0 w_1 + \cancel{i}\gamma \frac{p_0}{\rho_0} k \rho_1 = 0$

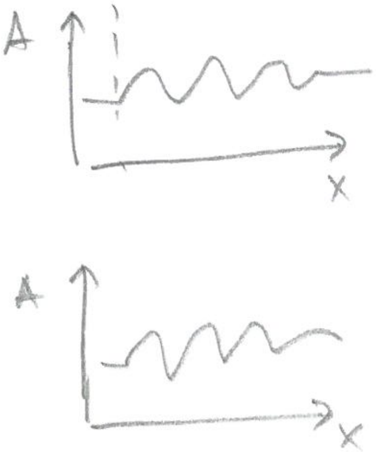
$$\rho_1 = \frac{\omega \rho_0^2 w_1}{\gamma k p_0}$$

$$-\frac{\omega^2 \rho_0^{\cancel{2}} w_1}{\gamma k p_0} + \cancel{\rho_0} k w_1 = 0 \quad \Big| \cdot \frac{\gamma k p_0}{\rho_0}$$

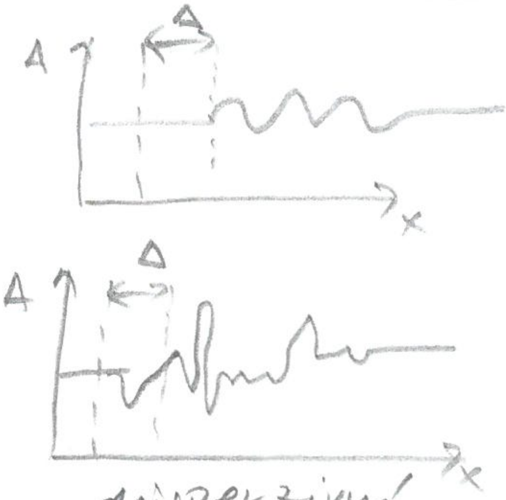
$$-\omega^2 \cancel{w_1} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} k^2 \cancel{w_1} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{k} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}}$$ disperzní relace

↑ $\equiv c_s$

- $D(\omega, k)$ obsahuje k, takže propaguje se vlna.
  Bez k – oscilace
- $\lambda = 2\pi / k$ vlnová délka
- fázová rychlost $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c_s$
  ↳ rychlost postupu konstantní fáze
- grupová rychlost $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c_s$
  ↳ rychlost propagace signálu (= modulace)
  $v_g \leq c$!
- pokud $v_\varphi = v_g$ ... nedisperzivní vlna (zachovává se vlnoplocha, jen posun)
  $v_\varphi \neq v_g$ ... disperzivní vlna (vlnoplocha mění tvar)
  – $v_\varphi = v_\varphi(k)$



ne-disperzivní



disperzivní

- „geometrická optika" – ignoruje efekty konečné vlnové délky
  - lepší popis: teorie rozptylu
- disperzní relace popisuje vztah ω, k
  → neříká, že vlna <u>musí</u> existovat (co když se neexcituje?)
  → nepopisuje amplitudu ani vlnoplochu (chybí: počáteční podmínky)
  → nepopisuje mechanismus vzniku

Pozn: co když $\vec{w}_0 \neq 0$?

rce kontinuity

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{w}_1 + \underbrace{\rho_1 \nabla \cdot \vec{w}_0}_{=0 \ w_0 \text{ homogenní}} + \vec{w}_0 \cdot \nabla \rho_1 = 0$$

$$\underline{-i\omega\rho_1} + i\rho_0 \vec{k} \cdot \vec{w}_1 + \underline{i\rho_1 \vec{w}_0 \cdot \vec{k}} = 0$$

$$-i\rho_1 (\underbrace{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}_0}_{\omega'}) + i\rho_0 \vec{k} \cdot \vec{w}_1 = 0$$

$$-i\rho_1 \omega' + i\rho_0 \vec{k} \cdot \vec{w}_1 = 0 \quad \text{jako předtím}$$

$$\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{w}_0$$

↑ Dopplerův jev!

Vlny v plazmatu

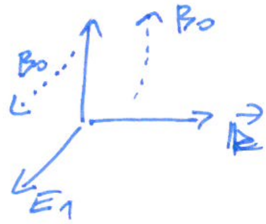
- excitovány obvykle nestabilitami

- ZOO:
  - elektronové
  - iontové

  - $\vec{k} \parallel \vec{E}_1$ – elektrostatické, longitudinální
  - $\vec{k} \perp \vec{E}_1$ – elektromagnetické, transverzální

  - $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ – paralelní
  - $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ – perpendikulární

  $k \perp E_1$, $k \perp B_0$ dva druhy



Postup

→ setup → podmínky pro hledanou ~~[illegible]~~ vlnu
→ řešení linearizovaných tekutinových rovnic (odpovídajících problému)
  → pokud řešení najdeme → vlna může existovat
→ diskuse vlastností řešení

Plazmové oscilace

setup:
- $E_0 = B_0 = 0$, $B_1 = 0$, $E_1 \neq 0$
- bez tepelných pohybů
- ionty pevné pozadí
- $n_{e0} = n_{i0} = n_0$
- pozadí homogenní a stacionární
- $\vec{u}_{e0} = 0$

Linearizované rovnice:

$$m n_0 \frac{\partial \vec{w}_{e1}}{\partial t} = -e n_0 \vec{E}_1 \quad \Big| \nabla \cdot$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + \nabla \cdot [n_0 \vec{w}_{e1}] = 0$$

$$\vec{E}_1 = -\nabla \varnothing_1$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_1 = -e n_{e1}$$

$$\varepsilon_0 \Delta \varnothing_1 = n_{e1} e$$

$$m n_0 \partial \frac{\nabla \cdot \vec{w}_{e1}}{\partial t} = e n_0 \Delta \varnothing_1$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{w}_{e1} = 0$$

$$m n_0 \frac{\partial \nabla \cdot \vec{w}_{e1}}{\partial t} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0} n_{e1}$$

$$\nabla \cdot \vec{w}_{e1} = -\frac{1}{n_0} \frac{\partial n_{e1}}{\partial t}$$

$$-m \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0} n_{e1} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$$

$$\omega^2 \cancel{n_{e1}} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \cancel{n_{e1}} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \equiv \omega_p^2}$$

plazmová frekvence

- $\omega^2 = \omega_p^2$ nemá k → oscilace, plazmové oscilace (oscilace elektronů kolem ~~za~~základní polohy)
- $v_f = \frac{\omega}{k}$ není definovaná, není vazba ve fázích
- $v_g = \frac{d\omega}{dk} = 0$ → nešíří se signál
- relaxace požadavku chladných elektronů

$$\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2} = \frac{k_B T_e}{m} \frac{1}{\omega_p^2} \sim \frac{1}{2} v_T^2 \frac{1}{\omega_p^2}$$

pro $v_T \sim \sqrt{\frac{2 k_B T_e}{m}}$

– fluktuace plazmových oscilací stíněny na Debyeově škále ⇒ není makroskopická změna náboje

Elektronová elektrostatická vlna bez mg. pole

setup
- $E_0 = B_0 = 0$, $B_1 = 0$, $E_1 \neq 0$
- Ionty chladné, elektrony ne
- Ionty fixní pozadí
- pozadí stacionární a homogenní
- $\vec{u}_{e0} = 0$
- $n_{e0} = n_{i0} = n_0$

$k \parallel E_1$

→ tepelné pohyby – isotermická stavová rce

$$\nabla p_e = \nabla (3 k_B T_e n_e) = 3 k_B T_e \nabla (n_0 + n_{e1})$$

↳ 1-D problém, $\gamma = \frac{2+N}{N} = 3$ N... stupně volnosti

Linearizované rce: $$m n_0 \frac{\partial \vec{w}_{e1}}{\partial t} = -e n_0 E_1 - 3 k_B T_e \nabla n_{e1} \quad / \nabla \cdot$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{w}_{e1} = 0$$

$$\vec{E}_1 = -\nabla \phi_1$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_1 = -e n_{e1}$$

$$\varepsilon_0 \Delta \phi_1 = n_{e1} e$$

$$m n_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{w}_{e1} = e n_0 \Delta \phi_1 - 3 k_B T_e \Delta n_{e1}$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{w}_{e1} = 0$$

$$m n_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{u}_{e1} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0} n_{e1} - 3 k_B T_e \Delta n_{e1}$$

$$\nabla \cdot \vec{w}_{e1} = -\frac{1}{n_0} \frac{\partial n_{e1}}{\partial t}$$

$$-m \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0} n_{e1} - 3 k_B T_e \Delta n_{e1}$$

$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

$\nabla \cdot \to +ik\cdot$

$\Delta \to -k^2$

$$\omega^2 \cancel{n_{e1}} = \omega_p^2 \cancel{n_{e1}} + 3k^2 \frac{k_B T_e}{m} \cancel{n_{e1}}$$

$$v_T^2 = \frac{2 k_B T_e}{m}$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_T^2}$$

- DR má k → vlna se propaguje. Šíří se jen pro $\omega > \omega_p$. Pro $\omega < \omega_p$ útlum

=7=

• $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + 3/2\, k^2 v_T^2}}{k} = v_\varphi(k)$

vlna disperzivní

• $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2}\frac{v_T^2 k}{\omega} = \frac{3}{2}\frac{v_T^2 k}{\sqrt{\omega_p^2 + 3/2\, k^2 v_T^2}} \neq 0$ vlna nese signál

limitně: $\lim_{k\to\infty} v_g = \frac{3}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{v_T^2 k}{\sqrt{\omega_p^2 + 3/2\, k^2 v_T^2}} \approx \frac{3}{2}\frac{v_T^2 k}{\sqrt{3/2\, k^2 v_T^2}} =$

$= \sqrt{\frac{3}{2}}\, v_T$

$\Rightarrow$ limitně se propaguje termální rychlostí

• řešeno "v hustotě". Co jiné veličiny?
Disperzní relace stejná, ale vzájemné možné fázové posuny

př. plné řešení pro hustotu $n_{e1} = \overline{n_{e1}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

$\vec{E_1}$? $\quad \vec{E_1} = \overline{E_1} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_{E_1})$

Poisson: $\quad \varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E_1} = -e n_{e1}$

$-\varepsilon_0 k \cdot \overline{E_1}\, \underline{\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_{E_1})} = -e\, \overline{n_{e1}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

$\sin(k\cdot r - \omega t)\cos\delta_{E_1} + \cos(k\cdot r - \omega t)\sin\delta_E =$

$= \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{\overline{n_{e1}}}{\vec{k}\cdot\vec{E_1}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

řešení pro $\delta_{E_1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ fázový posun proti n_{e1}

• směr $\vec{u_{e1}}$?

Lorentz: $\quad -\omega \vec{u_{e1}} = e(\vec{E_1} + \vec{u_{e1}} \times \vec{B_0})$, $B_0 = 0$

$\Rightarrow \vec{u_{e1}} = -\frac{e}{\omega}\vec{E_1} \Rightarrow \vec{u_{e1}} \parallel \vec{E_1}$

$\rightarrow$ opravdu podélná vlna

Iontová elektrostatická vlna s $B_0 = 0$

Setup:
- $E_0 = B_0 = 0$, $B_1 = 0$, $E_1 \neq 0$
- ionty i elektrony mají termální pohyby
- $n_{e0} = n_{i0} = n_0$
- pozadí stacionární homogenní
- $\vec{u}_{e0} = \vec{u}_{i0} = 0$

Linearizované rovnice

$$m n_0 \frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} = -e n_0 \vec{E}_1 - 3 k_B T_e \nabla n_{e1}$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{e1} = 0$$

$$M n_0 \frac{\partial \vec{u}_{i1}}{\partial t} = e n_0 \vec{E}_1 - 3 k_B T_i \nabla n_{i1} \quad \Big| \, \nabla \cdot$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{i1} = 0$$

$$\vec{E}_1 = -\nabla \phi_1$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_1 = e (n_{i1} - n_{e1})$$

Ionty „těžké" → elektrony „následují" ionty a vytvářejí stínění → použijeme Boltzmannův vztah

$$n_{e1} = n_e - n_{e0} = n_0 \left(\exp \frac{e \phi_1}{k_B T_e} - 1 \right) \sim n_0 \frac{e \phi_1}{k_B T_e}$$

a vyřešeno

$$M n_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{u}_{i1} = -e n_0 \Delta \phi_1 - 3 k_B T_i \Delta n_{i1}$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{i1} = 0$$

$$-\varepsilon_0 \Delta \phi_1 = e n_{i1} - e^2 n_0 \frac{\phi_1}{k_B T_e}$$

$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

$\nabla \to +ik$

$\Delta \to -k^2$

$$\cancel{-} M \cancel{i} \omega^2 n_{i1} = \cancel{-i}\, e n_0 k^2 \phi_1 \cancel{+i}\, 3 k_B T_i k^2 n_{i1}$$

$$+\varepsilon_0 k^2 \phi_1 = e n_{i1} - e^2 n_0 \frac{\phi_1}{k_B T_e}$$

$$\omega^2 = \frac{e^2 n_0 k^2}{M \left(\varepsilon_0 k^2 + \frac{e^2 n_0}{k_B T_e} \right)} + \frac{3 k_B T_i k^2}{M}$$

$\Omega_p^2 \equiv \frac{e^2 n_0}{M \varepsilon_0}$ plazmová iontová frekvence

$\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}$, $v_{Ti}^2 = \frac{2 k_B T_i}{M}$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\Omega_p^2 \lambda_D^2 k^2}{\lambda_D^2 k^2 + 1} + \frac{3}{2} v_{Ti}^2 k^2}$$ elektrostatická iontová vlna

neplatí obecně!

- plazmová aproximace $n_i = n_e$ → $n_{e1} = n_{i1}$

  → $k\lambda_D \ll 1$

pak $$\omega^2 = k^2 \left(\frac{k_B T_e}{M} + 3 \frac{k_B T_i}{M} \right)$$

- $v_f = \sqrt{\dfrac{k_B T_e + 3 k_B T_i}{M}} \equiv c_s$ v plazmatu

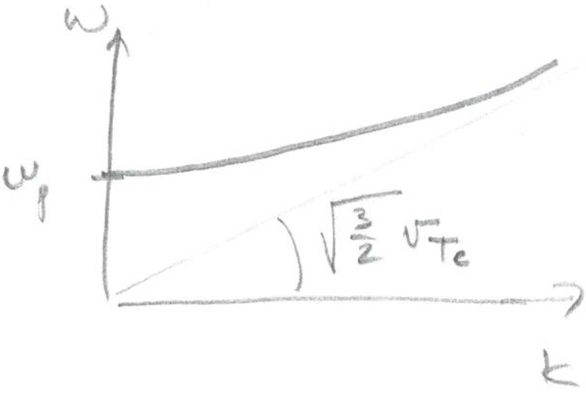
  v plazmatickém přiblížení je vlna nedisperzivní.
  Disperze se objeví na škálách sub-Debyeovských

- $v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = v_f = c_s$
- v laboratoři a často i ve vesmíru $T_i \ll T_e$

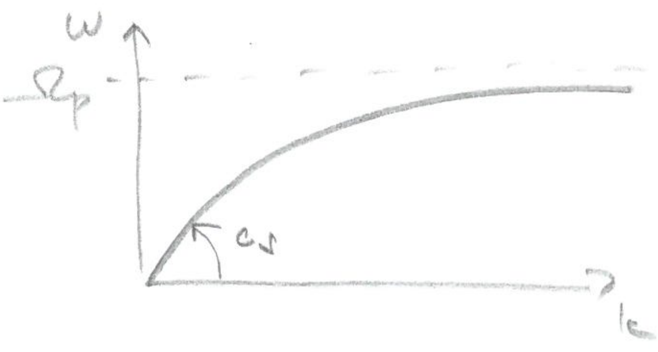
  $\Rightarrow c_s \sim \sqrt{\dfrac{k_B T_e}{M}} \Rightarrow$ hmotnost iontů, ale teplota elektronů!

- iontová vlna existuje jen, když funguje stínění. Elektrony vytaženy, stínění nedokonalé, vznikají akumulace náboje, vlna se šíří prostřednictvím vzniklého vnitřního E_1 pole
- asymptoticky $k \to 0 \Rightarrow \omega = 0$

  $k \to \infty \Rightarrow \omega = \Omega_p$



elektronová



iontová

elektrostatická vlna

$\boxed{\text{Elektronové vlny s } B_0 \neq 0 \text{ elektrostatické}}$

Setup:
- $E_0 = 0$, $B_0 \neq 0$, $B_1 = 0$, $E_1 \neq 0$
- ionty stacionární, tepelné pohyby elektronů taky zanedbáme
- pozadí homogenní a stacionární
- $\vec{u}_{e0} = 0$
- $\vec{k} \parallel \vec{E}_1$ ← podmínka elektrostatické vlny

Linearizované rovnice v Fourierově obrazu

$$-i\omega m \vec{u}_{e1} = -e(\vec{E}_1 + \vec{u}_{e1} \times \vec{B}_0)$$

$$-i\omega n_{e1} + i n_0 \vec{k}\cdot\vec{u}_{e1} = 0$$

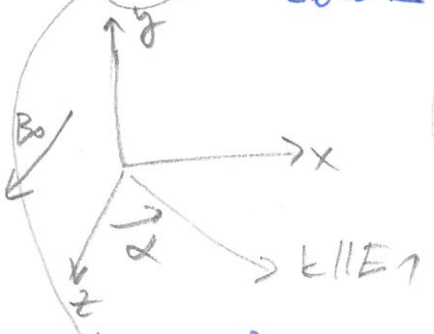
$$i\vec{k}\cdot\vec{E}_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_{e1}$$

$$\vec{E}_1 - \frac{i\omega m}{e}\vec{u}_{e1} - \vec{u}_{e1} \times \vec{B}_0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_1 = \frac{i e n_0}{\varepsilon_0 \omega}\vec{k}\cdot\vec{u}_{e1}$$

$$\vec{k} \parallel \vec{E}_1 \rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E}_1 = k E_1$$

$$E_1 = \frac{i e n_0}{\varepsilon_0 \omega k}\vec{k}\cdot\vec{u}_{e1} \quad \text{amplituda } E_1$$



$$\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$$

$$\vec{E}_1 = (E_1 \sin\alpha, 0, E_1 \cos\alpha)$$

$$\vec{k} = (k \sin\alpha, 0, k \cos\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} E_1 \sin\alpha \\ 0 \\ E_1 \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{i e n_0}{\varepsilon_0 \omega}\begin{pmatrix} u_{e1,x} \sin^2\alpha \\ 0 \\ u_{e1,z} \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \frac{i\omega m}{e}\begin{pmatrix} u_{e1,x} \\ u_{e1,y} \\ u_{e1,z} \end{pmatrix} - B_0 \begin{pmatrix} u_{e1,y} \\ -u_{e1,x} \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg| \cdot \frac{e}{i\omega m}$$

$$\begin{pmatrix} u_{e1,x} \\ u_{e1,y} \\ u_{e1,z} \end{pmatrix} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\begin{pmatrix} u_{e1,x} \sin^2\alpha \\ 0 \\ u_{e1,z} \cos^2\alpha \end{pmatrix} + i\frac{\omega_c}{\omega}\begin{pmatrix} u_{e1,y} \\ -u_{e1,x} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \qquad \omega_c = \frac{eB}{m}$$

Maticová rovnice $M_\omega \cdot \vec{u}_{e1} = 0$ s maticí

$$M_\omega = \begin{bmatrix} 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\sin^2\alpha & i\frac{\omega_c}{\omega} & 0 \\ -i\frac{\omega_c}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

netriviální řešení pro $\det M_\omega = 0$ rozvoj

$$\det M_\omega = \boxed{\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\cos^2\alpha\right)\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\sin^2\alpha-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)=0}$$

elektronové elektrostatické vlny v přítomnosti pozaďového magnetického pole

- nemá k ⇒ jen oscilace !
- $\alpha = 0$ ⇒ podél pole

$$\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2=\omega_p^2} \wedge \boxed{\omega^2=\omega_c^2}$$

podél pole jakoby tam nebylo + cyklotronní frekvence

- $\alpha = \pi/2$ ⇒ napříč polem

$$\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)=0$$

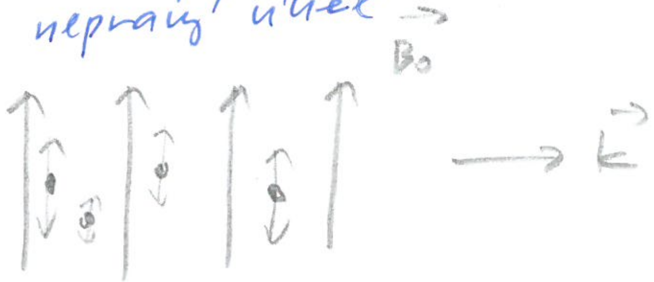
$$\Rightarrow \boxed{\omega^2=\omega_p^2+\omega_c^2 \equiv \omega_h^2}$$

horní hybridní frekvence

Iontové elektrostatické vlny

setup:
- $E_0 = 0$, $B_0 \neq 0$, $B_1 = 0$, $E_1 \neq 0$
- elektrony termální pohyb, ionty chladné
- $n_{i0} = n_{e0} \equiv n_0$
- pozadí homogenní stacionární
- $\vec{w}_{i0} = \vec{w}_{e0} = 0$
- $\vec{k} \parallel \vec{E}_1$

→ dva případy $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ a k a B_0 svírají nepravý úhel



elektrony stíní jen podél pole, nemohou být nositeli náboje napříč

elektrony mohou stínit, existuje komponenta $\vec{E}$ podél pole → může vzniknout vlna

① $\sphericalangle(\vec{k}, \vec{B}_0) = \alpha$, $\alpha \neq \pi/2$

→ elektrony vyřešíme Boltzmannovým vztahem

Euler: $-i\omega M \vec{w}_{i1} = -e\nabla\phi_1 + e\vec{w}_{i1} \times \vec{B}_0$

v komponentách: $-i\omega M w_{i1,x} = -eik\phi_1 + e w_{i1,y} B_0$

$$-i\omega M w_{i1,y} = -e w_{i1,x} B_0$$

$$-i\omega M w_{i1,x} = -eik\phi_1 + eB_0 \frac{eB_0}{i\omega M} w_{i1,x} \quad /: i\omega M$$

$$\cancel{-}w_{i1,x} = \cancel{-}\frac{ek\phi_1}{\omega M} \cancel{+} \left(\frac{eB_0}{M}\right)^2 \frac{1}{\cancel{i^2}\omega^2} w_{i1,x}$$

$$w_{i1,x} - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2} w_{i1,x} = \frac{ek\phi_1}{\omega M}$$

$$w_{i1,x} = \frac{ek\phi_1}{\omega M}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}$$

kontinuita: $n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} u_{i1,x}$

Boltzmann $n_{e1} = n_0 \frac{e\phi_1}{k_B T_e}$

pro $n_i = n_e$ a $n_{i1} = n_{e1}$

$$\Rightarrow u_{i1,x} = \frac{\omega}{k} \frac{e\phi_1}{k_B T_e}$$

$$\frac{\omega}{k} \frac{\cancel{e\phi_1}}{k_B T_e} = \frac{\cancel{e} k \cancel{\phi_1}}{\omega M}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 - \Omega_c^2 = \frac{k_B T_e}{M} k^2}$$

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{k_B T_e}{M} + \frac{3 k_B T_i}{M}\right) \doteq \frac{k_B T_e}{M} \qquad T_i \ll T_e$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 c_s^2}$$

iontová zvuková vlna v B_0

jen pokud $\theta > \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$ pak kinetická energie elektronů dost velká na stínění

pro úhly menší musíme jinak

(2) $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ bez stínění. Řešíme obojí e^- i i^+

pro ionty z předchozího

$$u_{i1,x} = \frac{ek\phi_1}{M}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \wedge \quad n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} u_{i1,x}$$

pro elektrony analogicky

$$u_{e1,x} = -\frac{ek\phi_1}{m}\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \wedge \quad n_{e1} = n_0 \frac{k}{\omega} u_{e1,x}$$

pokud $n_{e1} = n_{i1}$, pak $u_{e1} = u_{i1}$

$$M\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right) = -m\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)$$

$$M \frac{\omega^2 - \Omega_c^2}{\cancel{\omega^2}} = -m \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\cancel{\omega^2}}$$

$$M\omega^2 - M\Omega_c^2 = -m\omega^2 + m\omega_c^2$$

$$\omega^2 (M+m) = m\omega_c^2 + M\Omega_c^2 = e^2 B_0^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) =$$

$$= e^2 B_0^2 \left(\frac{M+m}{mM}\right)$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{eB_0}{m} \frac{eB_0}{M} = \omega_c \Omega_c \equiv \omega_d^2}$$

~~iontová elektrostatická vlna~~

iontové elektrostatické oscilace napříč mg. polem

dolní hybridní frekvence