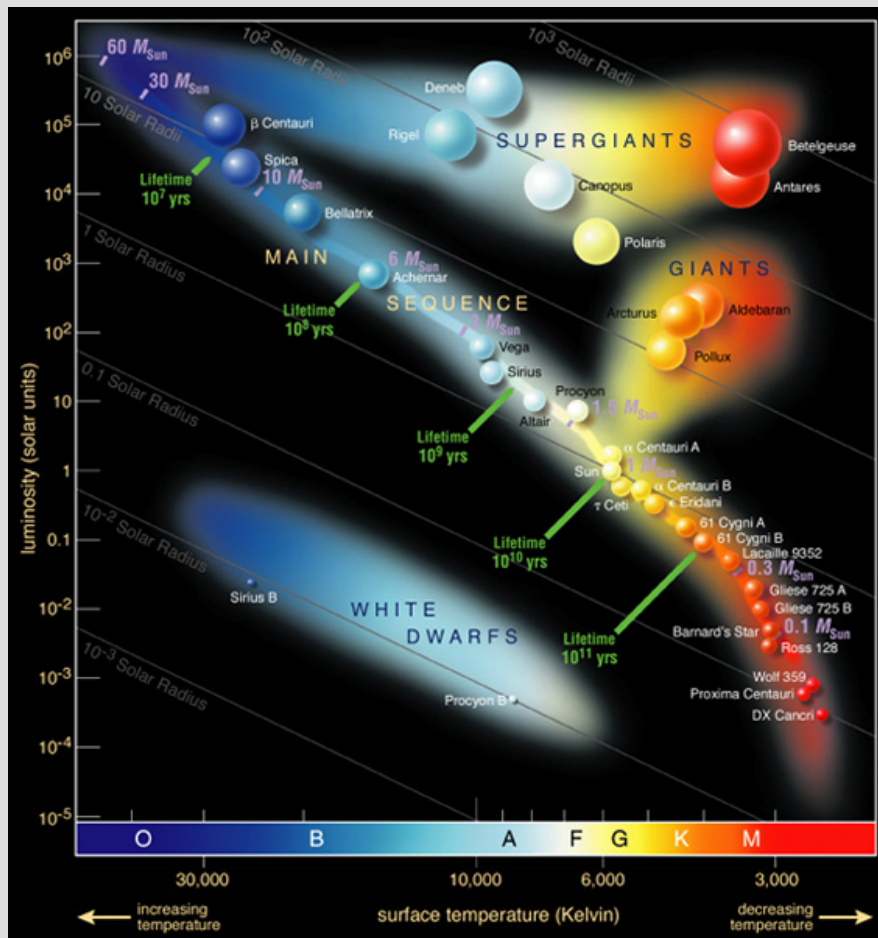


Roztřeseným pohledem na jinak obyčejnou hvězdu za humny

Michal Švanda

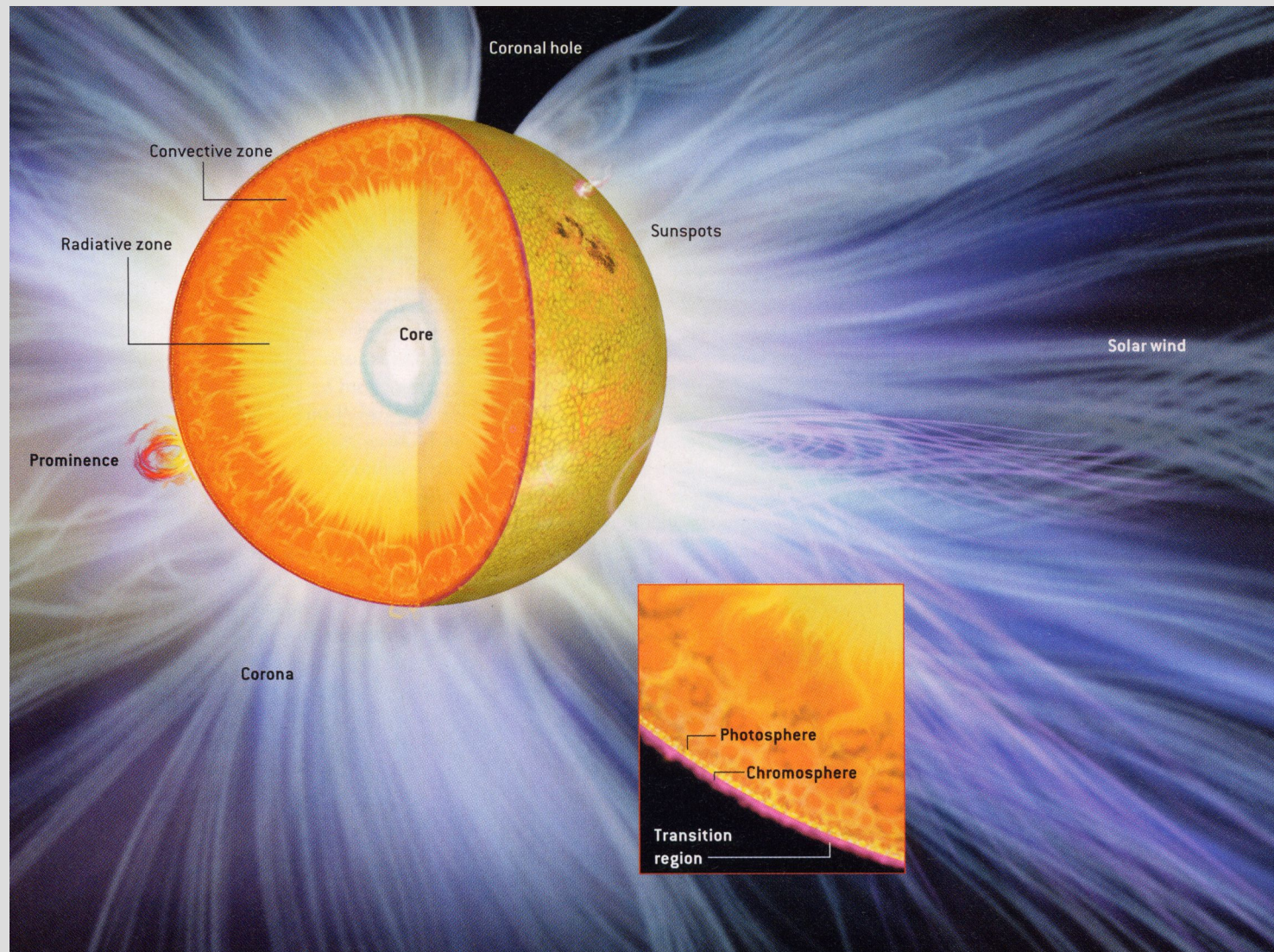
*Astronomický ústav AV ČR Ondřejov
Astronomický ústav UK Praha*

Hvězda zvaná Slunce

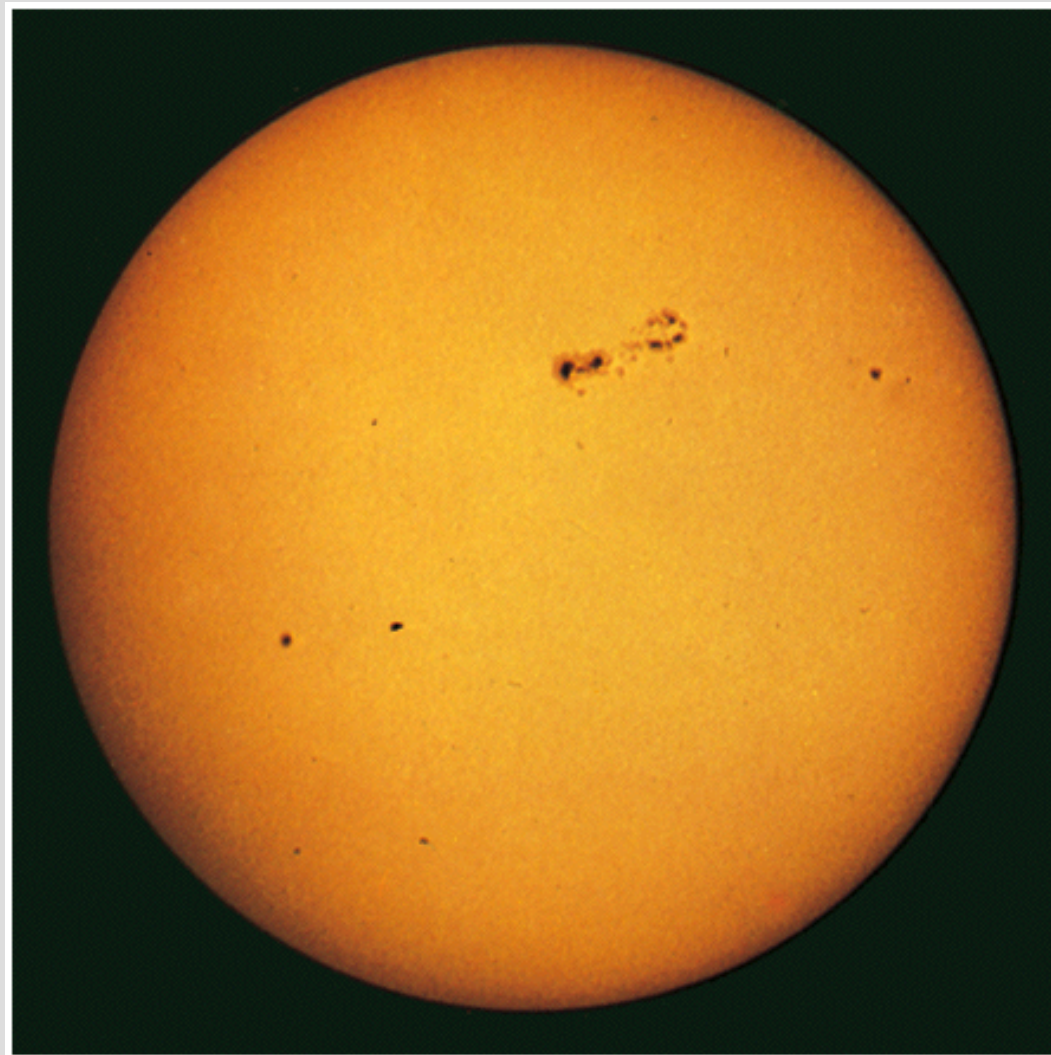


- G2V
- $M=1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
- $T_{\text{ef}}=5778 \text{ K}$
- $R=695\,000 \text{ km}$
- $L=3,85 \times 10^{26} \text{ W}$
- $\langle \rho \rangle = 1\,408 \text{ kg/m}^3$
- $(U-B)=0,20$
- $(B-V)=0,66$

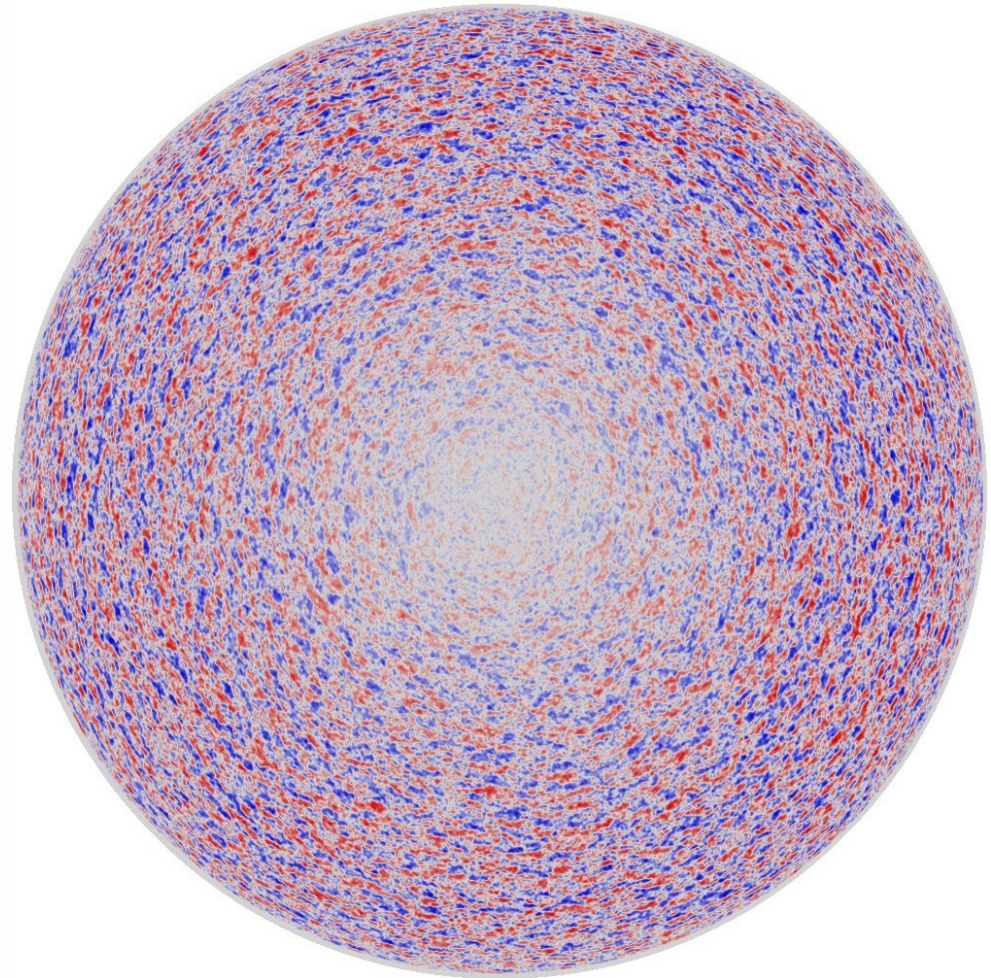
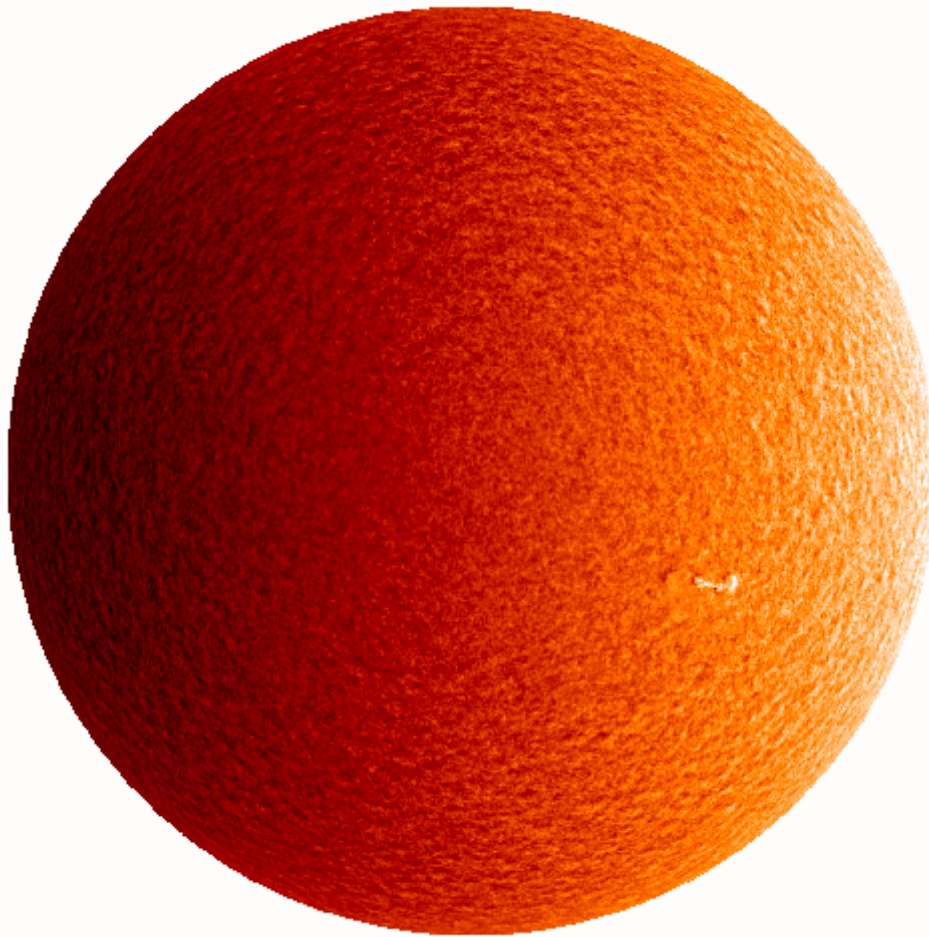
Struktura slunečného nitra



Fotosféra (1)

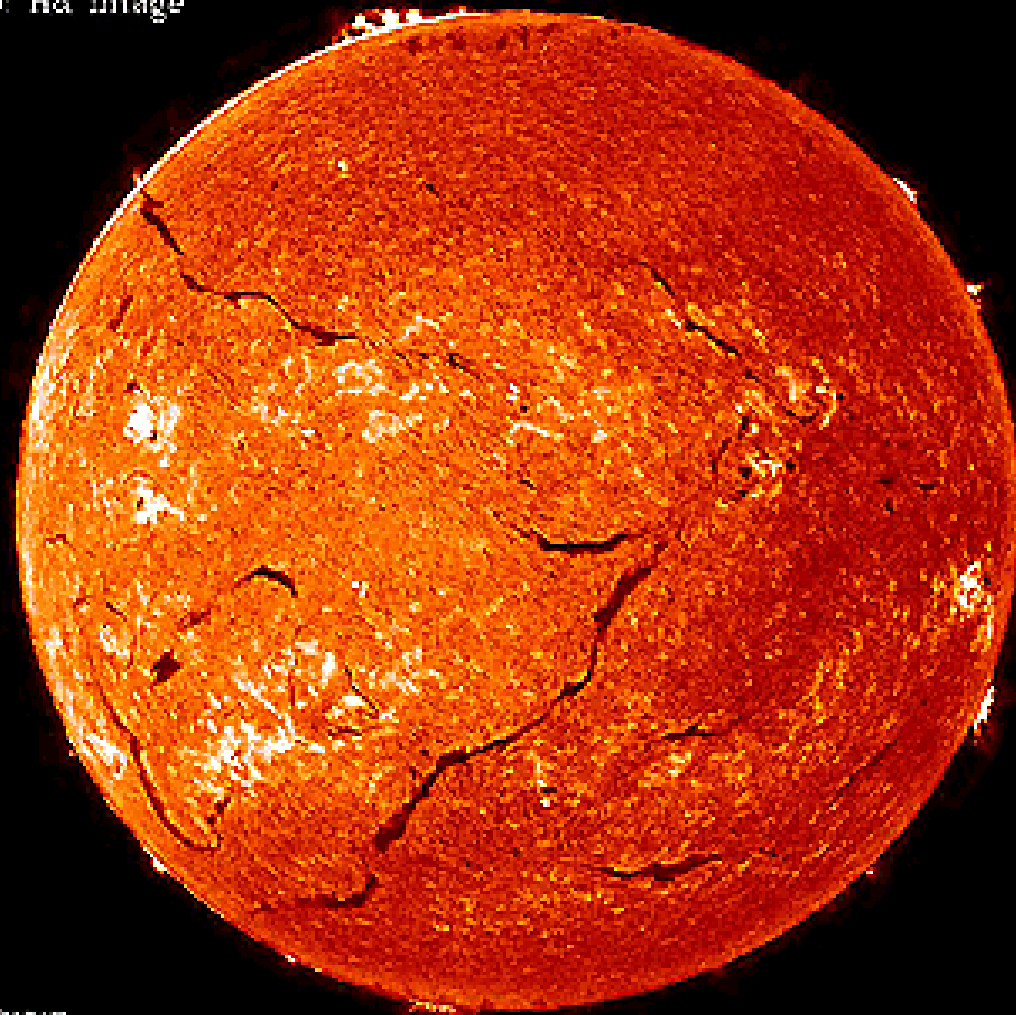


Fotosféra (2)



Chromosféra

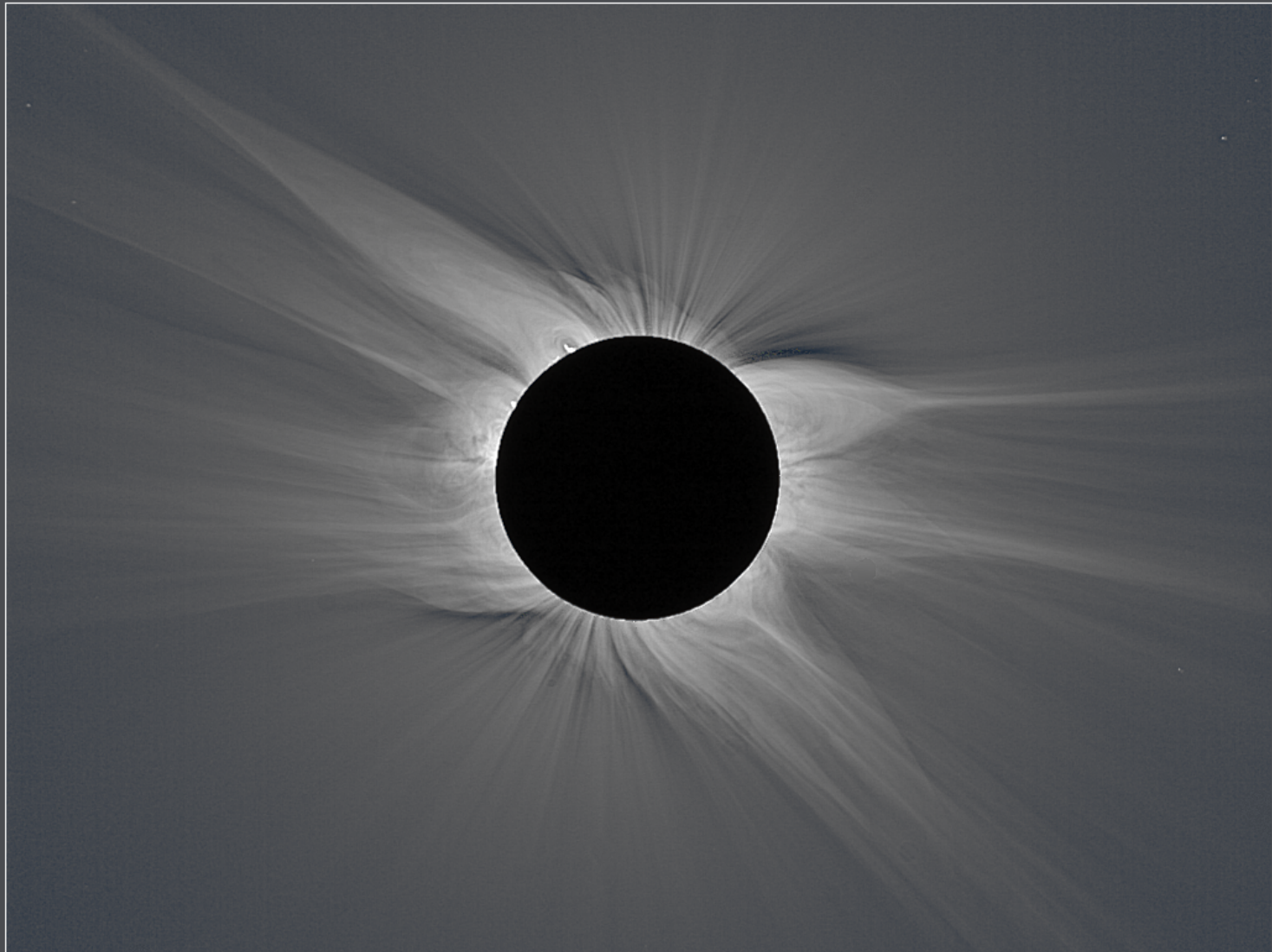
11 August 1980: H α image



Source: NOAA/SEL/USAF

H10 A-005

Koróna



Rovnice hvězdného nitra

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi\rho r^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \varepsilon - T \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} \rightarrow -\frac{3\kappa L}{16\pi^2\sigma r^4 T^3} \left(\frac{\partial T}{\partial m} \right)_{\text{conv}}$$

$$\rho = \rho(P, T)$$

$$dS = dS(P, T)$$

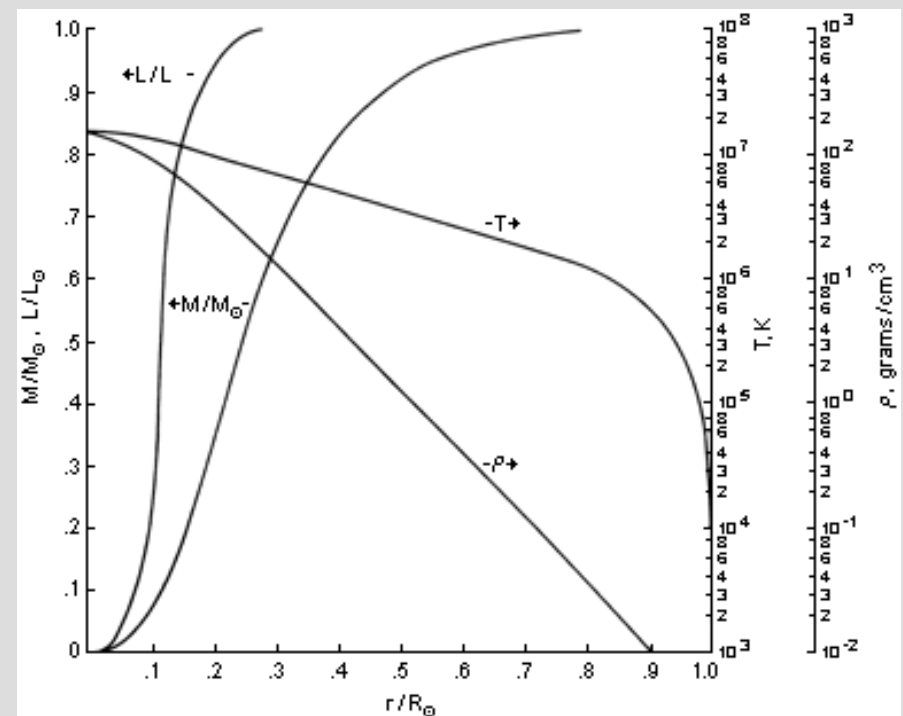
$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T)$$

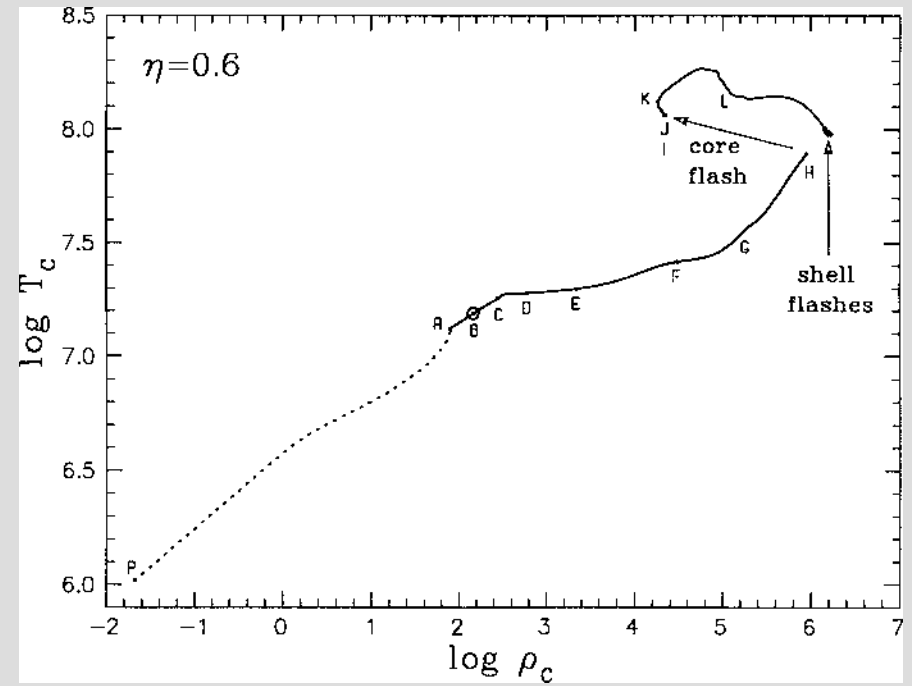
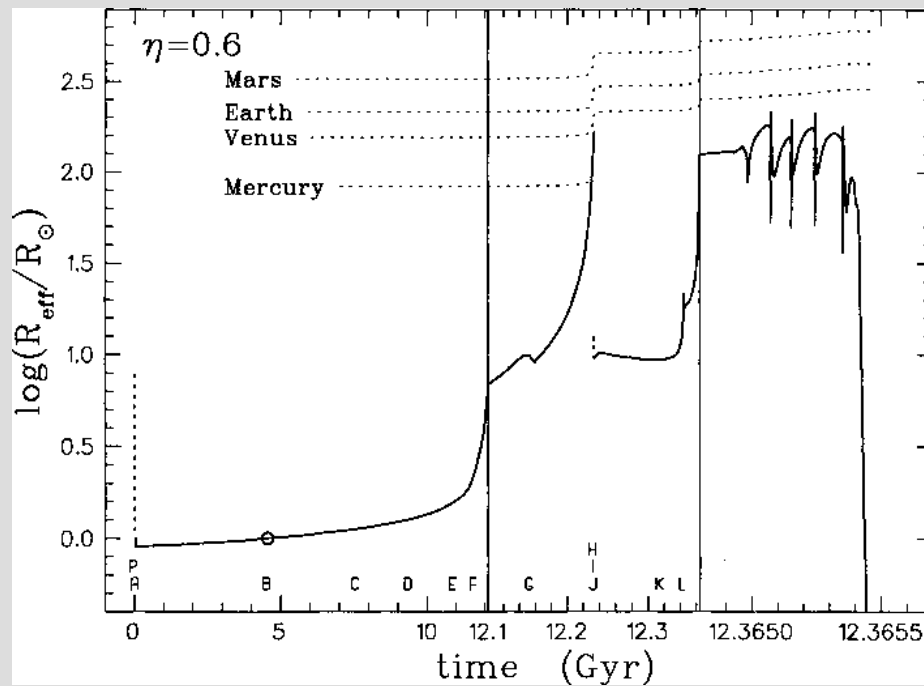
- Okrajové podmínky
- Na povrchu
jednoduchý model
atmosféry

Standardní model Slunce

- Řešením rovnic hvězdného nitra
- Neutrinový problém?
 - Nestandardní modely (low Z, rychle rotující jádro, vnitřní míchání, vnitřní mg. pole)
- Na ZAMS:
 - $L = 0,72 L_0$
 - $R = 0,88 R_0$



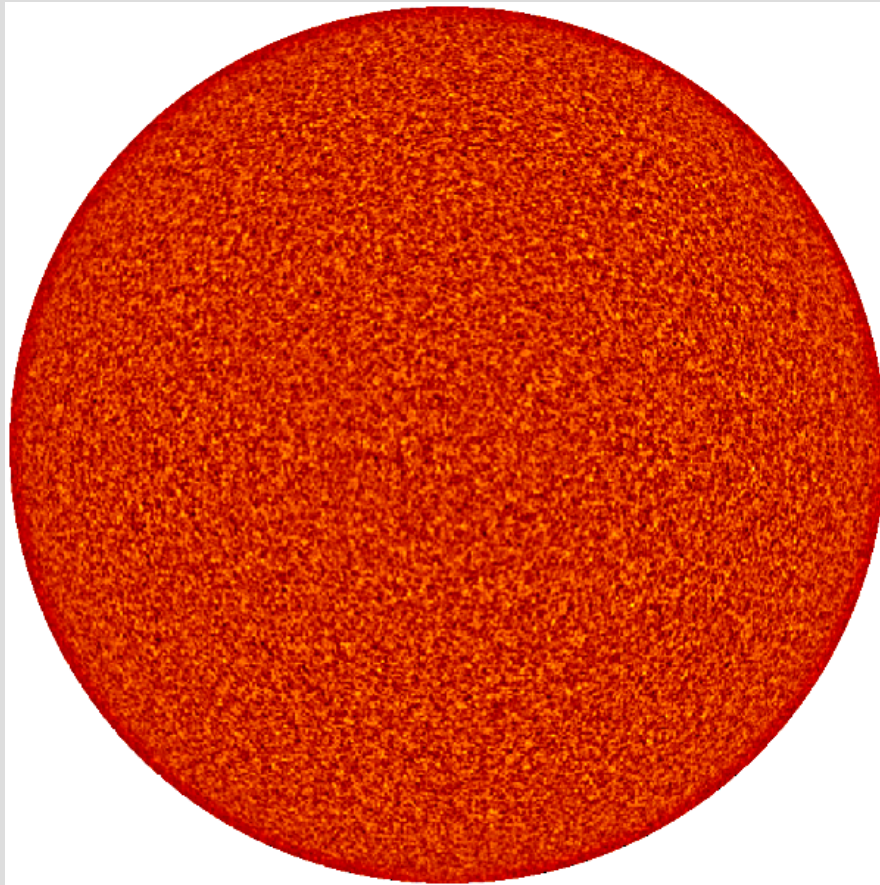
Slunce v budoucnosti



Oscilace (1)

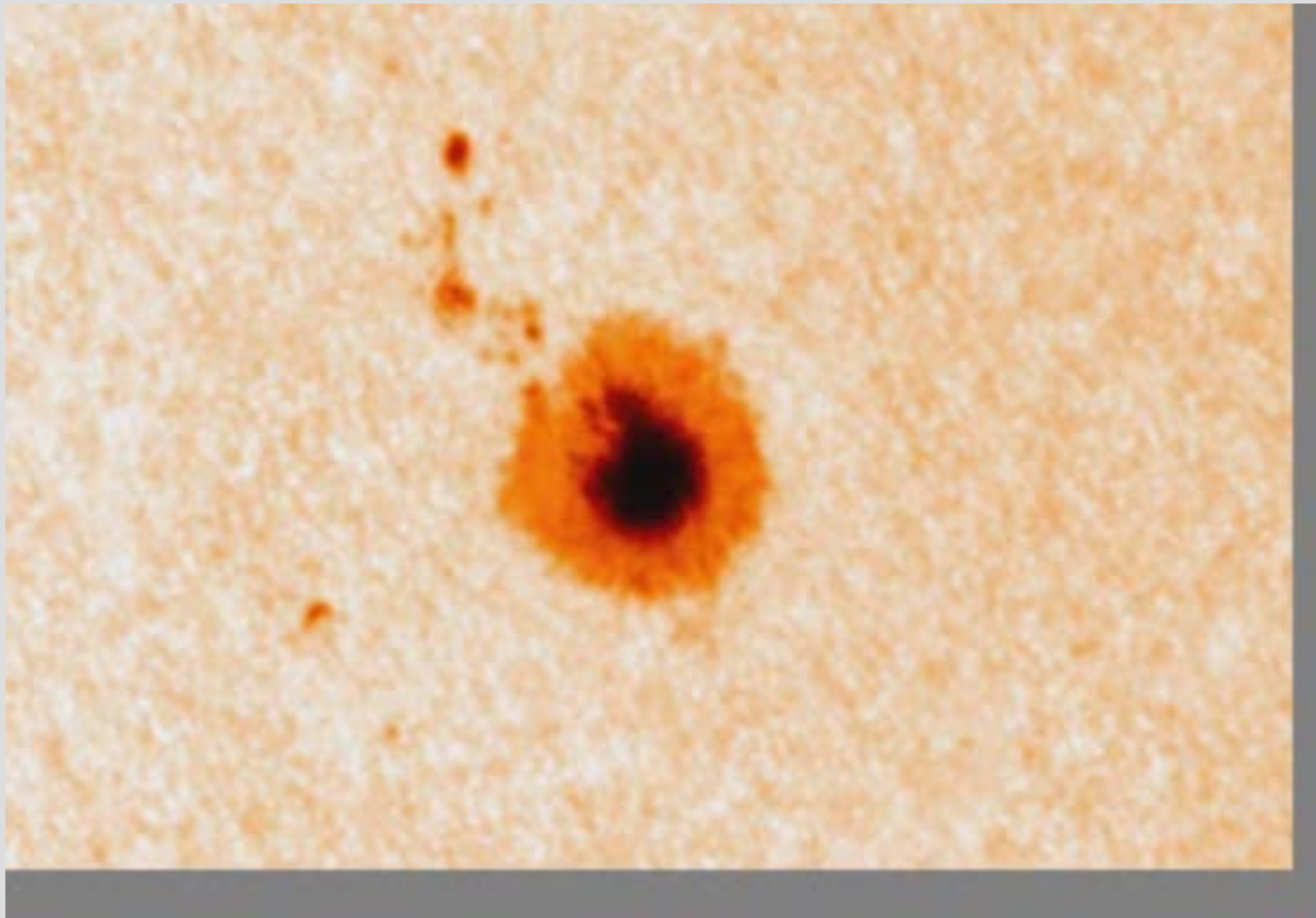
- 1960 spektroheliografickou metodou (rozdílová struktura rychlostního pole, Leighton et al. (1962))
- V daném místě kvazisinusoidální oscilace s amplitudou stovek m/s a periodou 296 s
- Oscilace převážně radiální
 - Zvukové vlny způsobené konvekcí odpovídající granulaci
 - Interference 10^7 různých modů

Oscilace (2)



- Fotosféra (296 s)
- Chromosféra (180 a 240 s)
- Oscilace pod 100 s neměřitelné (vlnová délka srovnatelná s střední vlnou drahou fotonu)

Oscilace (3)



Popis oscilací (1)

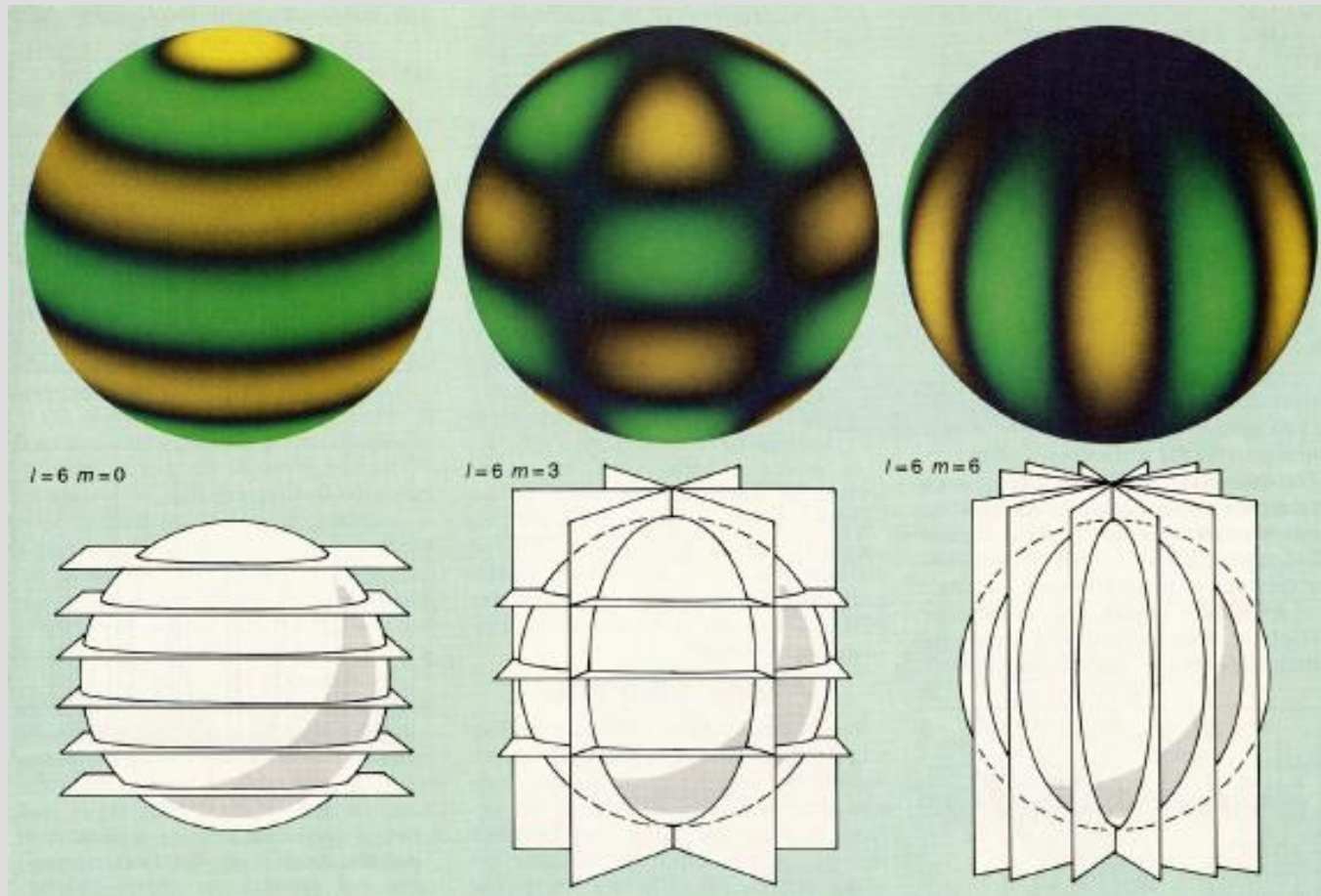
- Klasicky – pomocí FT převod do frekvencí
- V „kulatém“ problému je kartézská FT nevhodná – sférické harmoniky

$$v(\theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm}(t) Y_l^m(\theta, \phi) ,$$

$$Y_l^m = P_l^{|m|}(\theta) e^{i m \phi}$$

Popis oscilací (2)

- n
- l
- m
- ω



Měření oscilací

- Omezení daná Fourierovou transformací

$$\Delta \omega = 2\pi / T \rightarrow \Delta \omega = 2\pi / T$$

$$\text{Nyquistova frekvence : } \omega_{\text{Ny}} = \pi / \Delta t$$

$$\Delta \omega = 2\pi / T \leq \omega \leq \pi / \Delta t$$

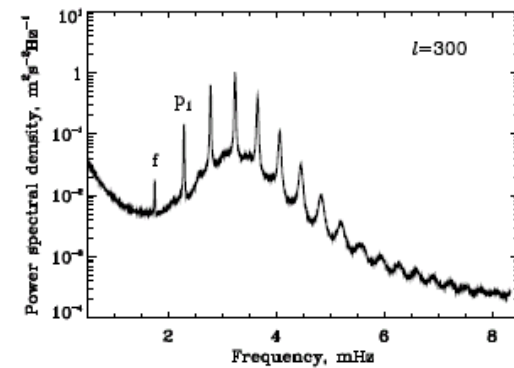
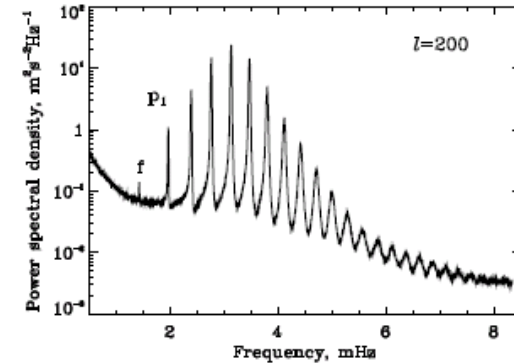
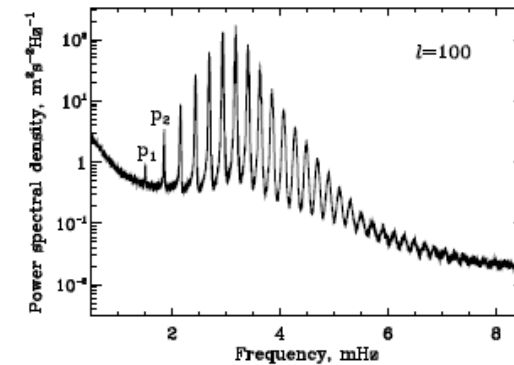
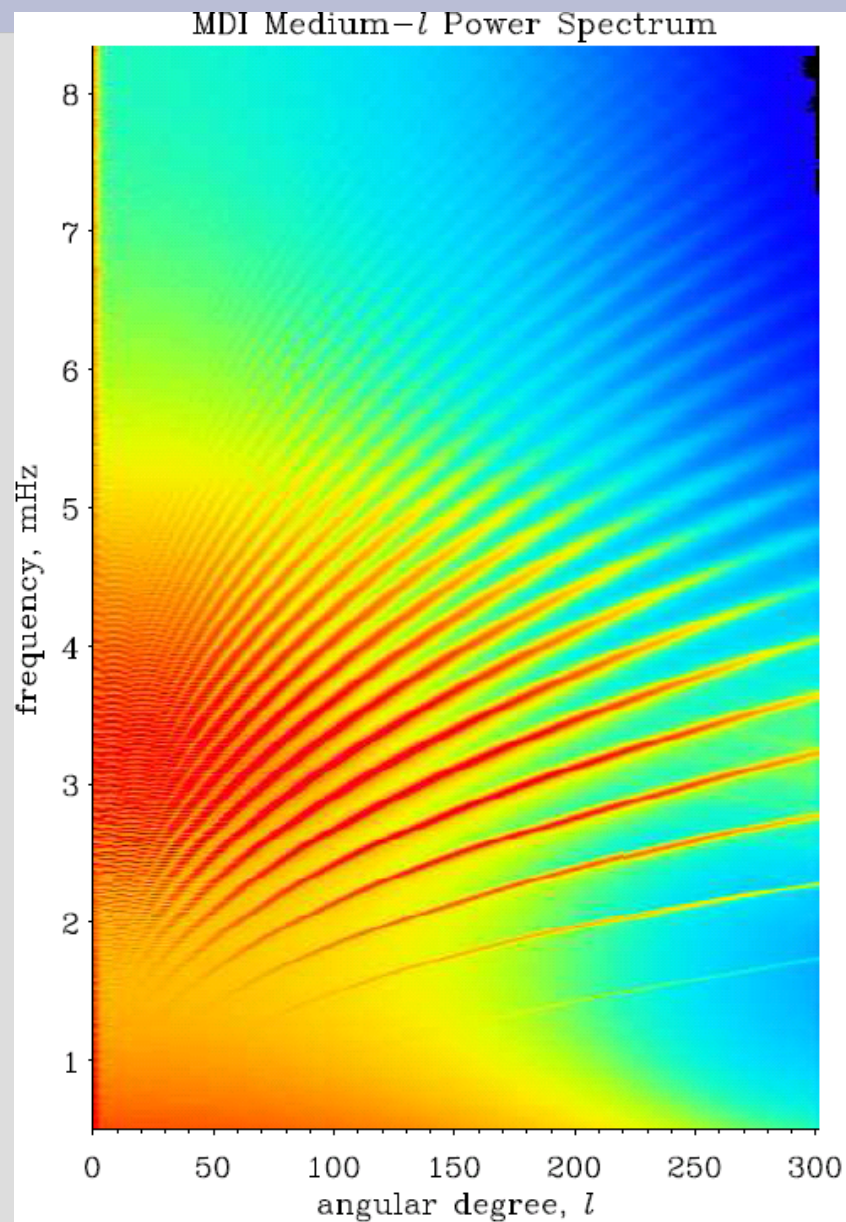
$$\Delta k_x = 2\pi / L_x \leq k_x \leq \pi / \Delta x$$

- T doba měření, Δt vzorkovací frekvence, L_x rozměr měření ve směru x , Δx prostorová vzorkovací frekvence

Pozorované oscilace (1)

- Distribuce k_h vůči ω – diskrétní (1975 hřbetová struktura)
- Největší výkon ve frekvencích 2,5–4,5 mHz a vlnovými čísly $0,8 \text{ Mm}^{-1}$ (tedy $\lambda > 8 \times 10^3 \text{ km}$)
- Jako variace rychlostní struktury, ale také variace celkového zářivého toku (5minutové oscilace variace $10^{-5} L_0$)

Pozorované oscilace (2)



Pozorované mody oscilací

- G mody
 - Odpovědnou silou je gravitace
 - Nízké frekvence, nešíří se konvektivní zónou
- P mody
 - Šíření zvukového vzruchu
 - Zdrojem konvekce
 - Vysoké frekvence, nešíří se radiativní vrstvou
- F mod
 - povrchový gravitační mod (analogie mořských vln), mod s $n = 0$

Základní mod oscilací Slunce

$$\lambda \sim R_0, \quad c = \sqrt{\gamma \bar{P} / \bar{\rho}} \sim \sqrt{\gamma G M_0 / R_0}$$

$$\bar{P} \sim \frac{G M_0}{R_0} \rho$$

$$\tau = 4R_0 / c \sim 4(R_0^3 / \gamma G M_0)^{1/2} \sim (G \bar{\rho})^{-1/2}$$

- Pro Slunce cca 60 min, stejným mechanismem pulsují např. cepheidy

Lineární adiabatické oscilace (1)

- Vychází se z hydrodynamických rovnic

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi$$

- Předpokládá se existence eulerovské poruchy, např:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

Lineární adiabatické oscilace (2)

- Pro $\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_1$, kde ξ je lineární výchylka od rovnovážné polohy a pro $\nabla \cdot v_0 = 0$ při zanedbání členů vyšších řádů

$$\rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \nabla p_1 + \rho_0 \nabla \Phi_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \nabla p_0 = 0$$

- Doplnit Poissonovou rovnicí

$$\nabla \Phi_1 = 4\pi G \rho_1$$

Lineární adiabatické oscilace (3)

- Adiabatická aproximace: $\frac{\delta P}{P_0} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0}$

δ značí lagrangeovskou poruchu: $\delta f = f_1 + \xi \cdot \nabla f_0$

dále: $c = \gamma P_0 / \rho_0$

- Radiální symetrie – převod do sférických souřadnic (poruchy analogicky):

$$\xi = e^{i\omega t} \left(\xi_r(r), \xi_h(r) \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\xi_h(r)}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

Lineární adiabatické oscilace (4)

- Rovnice nabydou tvaru:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \xi_r \right) - \frac{\xi_r g}{c^2} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} \right) P_1 - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} \Phi_1 = 0$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d}{dr} + \frac{g}{c^2} \right) P_1 - (\omega^2 - N^2) \xi_r + \frac{d\Phi_1}{dr} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_1}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi_1 - \frac{4\pi G \rho_0}{g} N^2 \xi_r - \frac{4\pi G}{c^2} P_1 = 0$$

$$g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dr}, \quad N^2 = g \left(\frac{1}{\gamma P_0} \frac{dP_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right)$$

Lineární adiabatické oscilace (5)

- Cowlingova aproximace:
 - Chyba maximálně několik procent oproti řešení plného systému rovnic

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) - \frac{\xi_r g}{c^2} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} \right) P_1 - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} \Phi_1 = 0$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d}{dr} + \frac{g}{c^2} \right) P_1 - (\omega^2 - N^2) \xi_r + \frac{d\Phi_1}{dr} = 0$$

~~$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_1}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi_1 - \frac{4\pi G \rho_0}{g} N^2 \xi_r - \frac{4\pi G}{c^2} P_1 = 0$$~~

Lineární adiabatické oscilace (6)

- Úhlová část vlastního problému na povrchu Slunce:

$$r^2 \Delta_{\vartheta\varphi} Y_l^m = r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)_{\text{local}} Y_l^m = r^2 (k_x^2 + k_y^2) Y_l^m = r^2 k_h^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m$$

- Pro $r=r_0$ je pak $l(l+1) = (k_h r_0)^2$

Lokální přístup

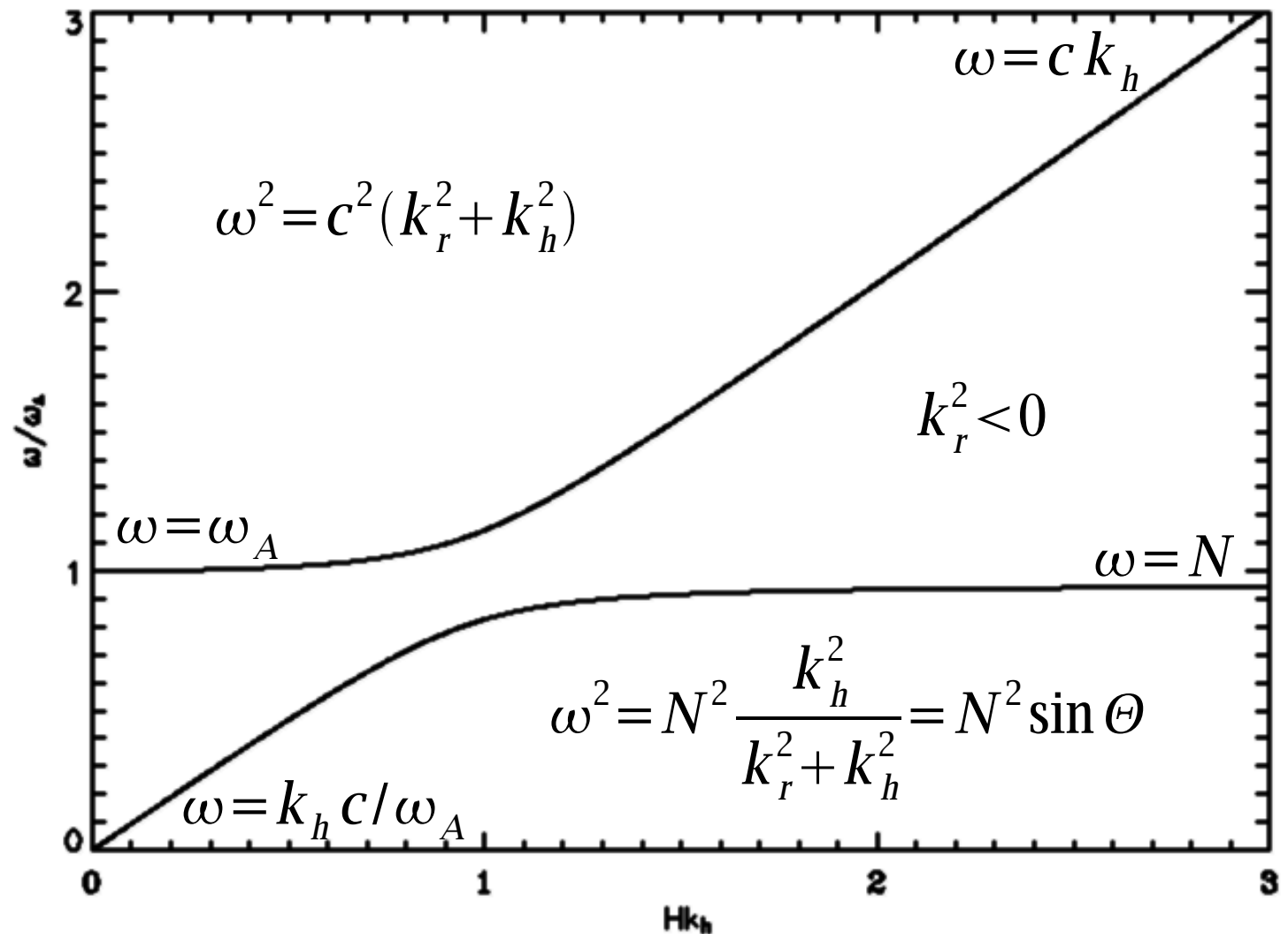
- N , c a g konstantní (izotermální atmosféra),
dále $\xi_r/r \ll dr/dr$ hledáme řešení
s Cowlingovou aproximací ve tvaru:

$$\xi_r \sim \rho_0^{-1/2} e^{ik_r r}, \quad P_1 \sim \rho_0^{-1/2} e^{ik_r r}$$

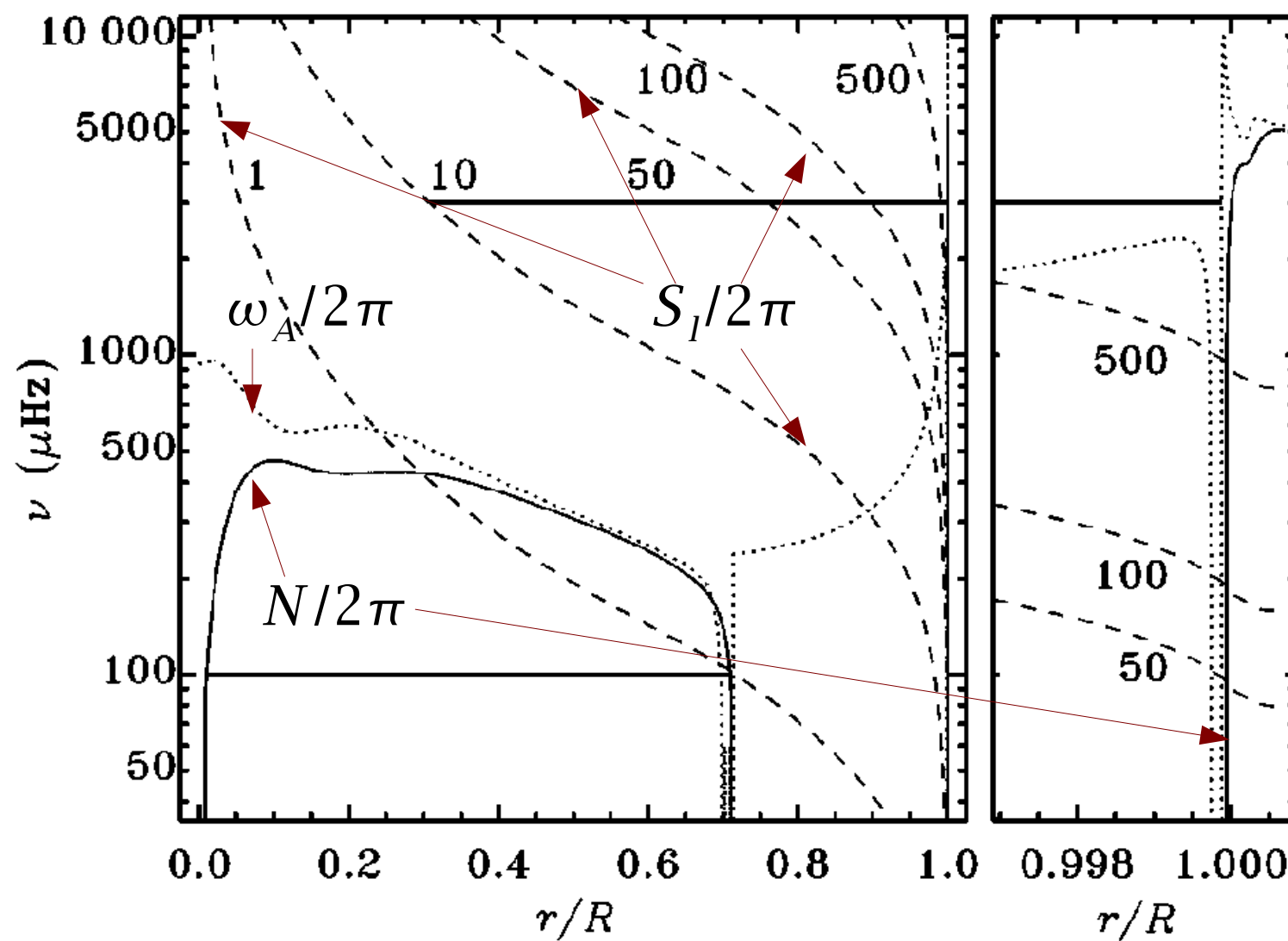
- Zavedeme $S_l^2 = \frac{l(l+1)}{r^2} c^2$
- Řešením disperzní relace:

$$k_r^2 = \frac{\omega - \omega_A}{c^2} + S_l^2 \frac{N^2 - \omega^2}{c^2 \omega^2}, \quad \omega_A = \frac{c}{2H} = \frac{g}{2} \left(\frac{\gamma \mu}{RT} \right)^{1/2}$$

Lokální přístup – k– ω diagram



Průběh kritických frekvencí



Vnitřní odraz vlny (1)

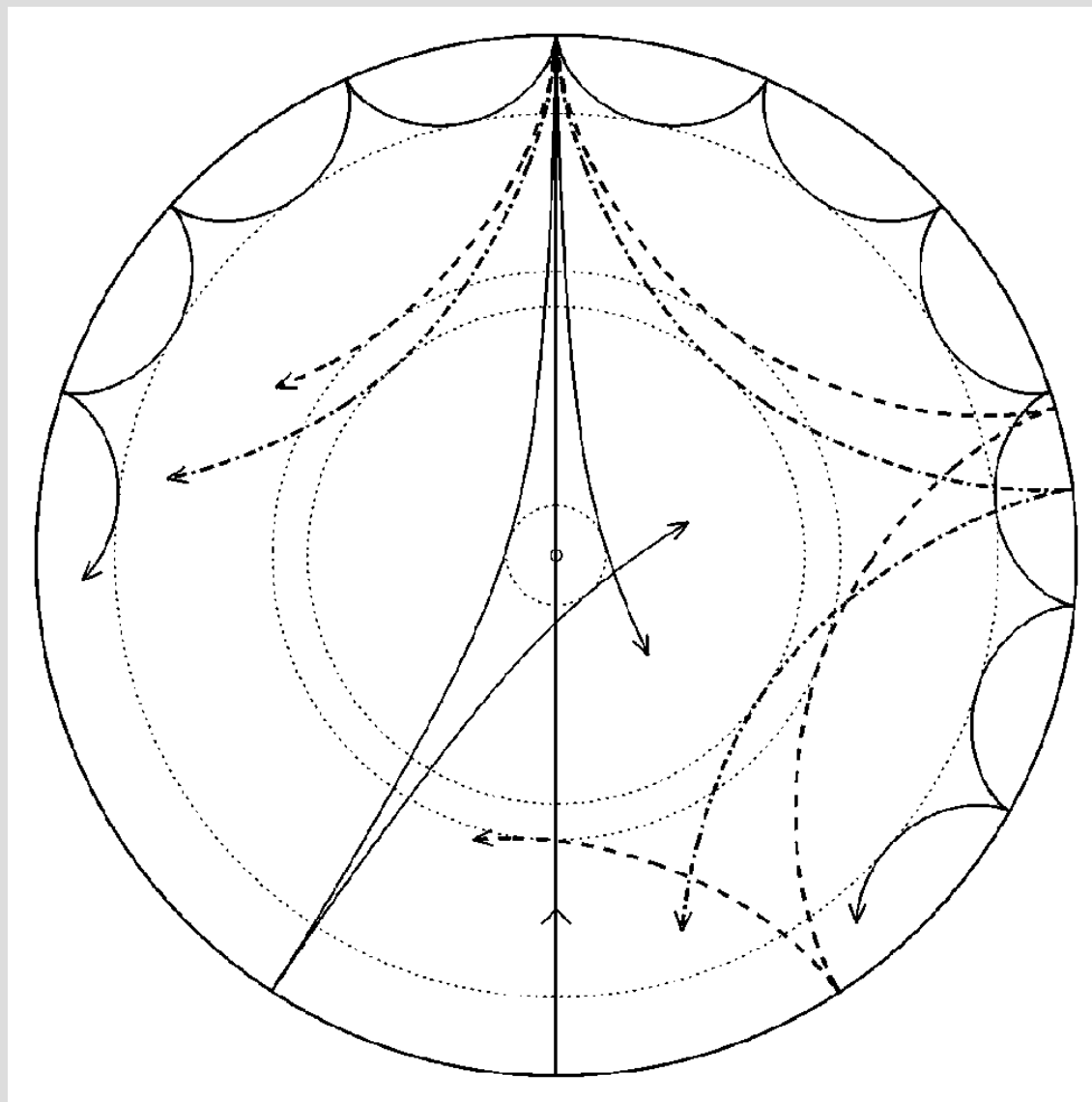
- Změna stav. parametrů = změna podmínek šíření dané vlny = úprava disperzní relace
- Pro velká l :

$$k_r^2 = (\omega^2 - S_l^2) / c^2$$

- Odraz vlny pro $k_r^2 = 0$

$$k_r = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = S_l^2 \Rightarrow r_l = [l(l+1)]^{1/2} c(r_l) / \omega = \frac{\omega^2}{(\gamma - 1) g k_h^2}$$

Vnitřní odraz vlny (2)



Stojaté vlny

$$\pi(n + \alpha) = \Delta \psi = \int_{r_l}^{r_0} k_r dr = \int_{r_l}^{r_0} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_h^2 \right)^{1/2} dr$$

$$\pi(n + \alpha) \sim k_h r_l = \frac{\omega^2}{(\gamma - 1) g k_h}$$

$$\omega_n^2 \sim (n + \alpha) g k_h$$

- Toto je pozorováno (hřebety v k - ω diagramu)

f-vlny

- Vlny s $n=0$, pro které platí $\nabla \cdot \xi = 0$
- Vlastní fce přibližně exponenciální: $\xi_r \sim \exp(k_h r)$
- Frekvence nezávislá na vnitřní struktuře hvězdy
- Jednoznačně identifikovatelné ve spektru bez možnosti záměny s jiným modelem z důvodu nejistoty slunečního modelu

Interpretace

- Přímé modelování – výpočet slunečního modelu, radiální průběhy stavových parametrů, řešení perturbačních rovnic, vlastní frekvence oscilací
 - Variací nejistých veličin lze dospět ke „správnému“ modelu
 - Vyloučeny mnohé alternativní modely
 - Současná helioseismologie prokazuje platnost standardního modelu

Heliosesmická inverze (1)

- Nalezení integrandu určitého integrálu
 - Obecně možné, pokud integrand závisí na parametru, jehož je integrál funkcí
- Určení průběhu rychlosti zvuku:
 - Definice: $u = l(l+1)/\omega^2$
 $\xi = (r/c)^2$
 - Přepis:

$$\Delta \psi = \int_{r_l}^{r_0} \left(\frac{\omega^2 - S_l^2}{c^2} \right)^{1/2} dr \Rightarrow$$
$$F(u) = \int_u^{\xi_0} (\xi - u)^{1/2} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\xi} d\xi$$

Heliosesmická inverze (2)

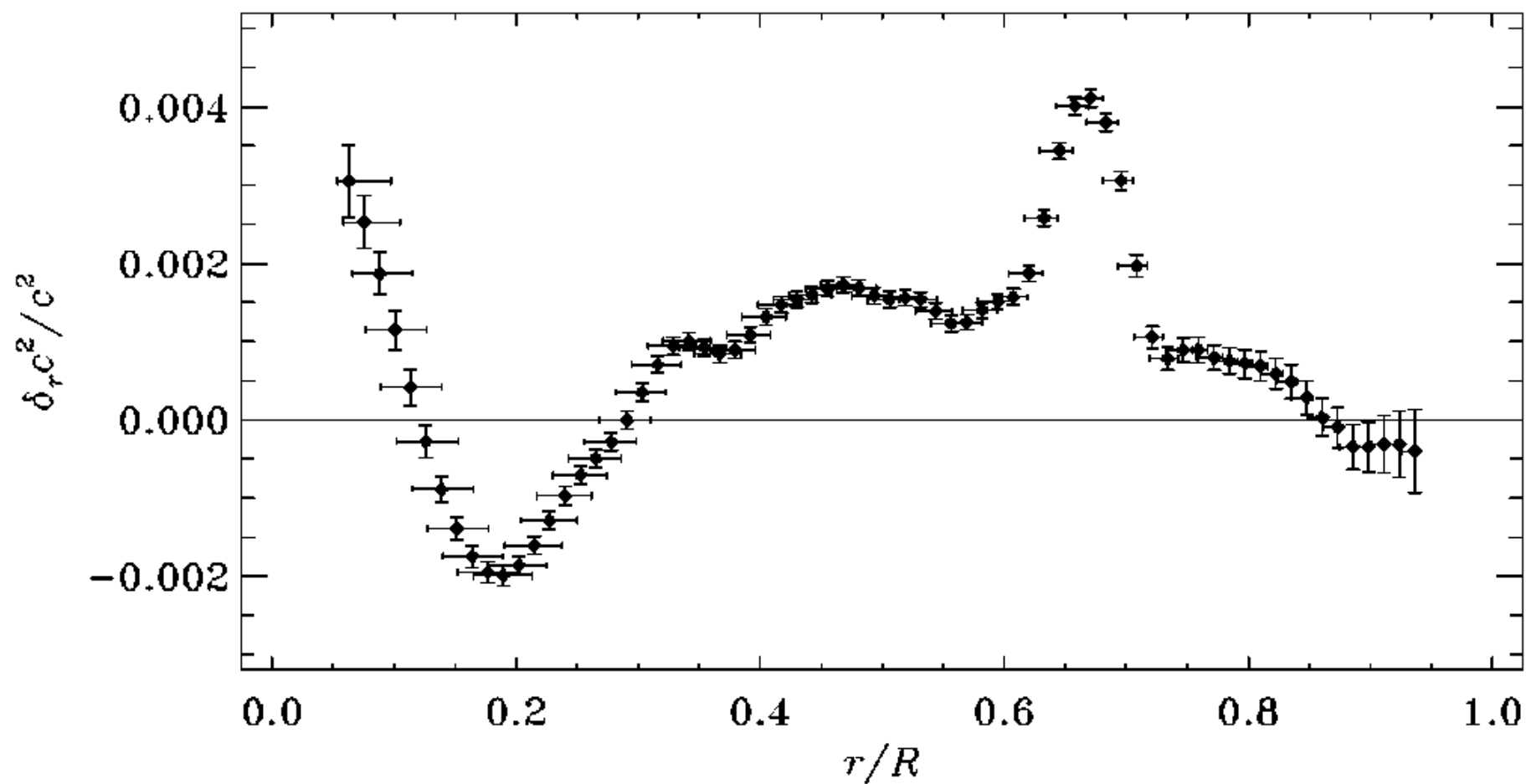
- Diferenciace podle u :

$$-2 \frac{dF}{du} = \int_u^{\xi_0} \frac{dG/d\xi}{(\xi - u)^{1/2}} d\xi, \quad G \equiv \ln r$$

- Lze rozřešit (Abelova diferenciální rovnice):

$$r = r_0 \exp \left(-\frac{2}{\pi} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dF/du}{(u - \xi)^{1/2}} du \right)$$

Heliosesmická inverze (3)



Rotace (1)

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\Omega} = (\Omega \cos \vartheta, -\Omega \sin \vartheta, 0)$$

$$\omega_{nlm} = \omega_{nl0} + m \int_0^{R_0} \int_0^\pi K_{nlm}(r, \vartheta) \Omega(r, \vartheta) r \, dr \, d\vartheta, \quad K_{nlm} \sim m^2$$

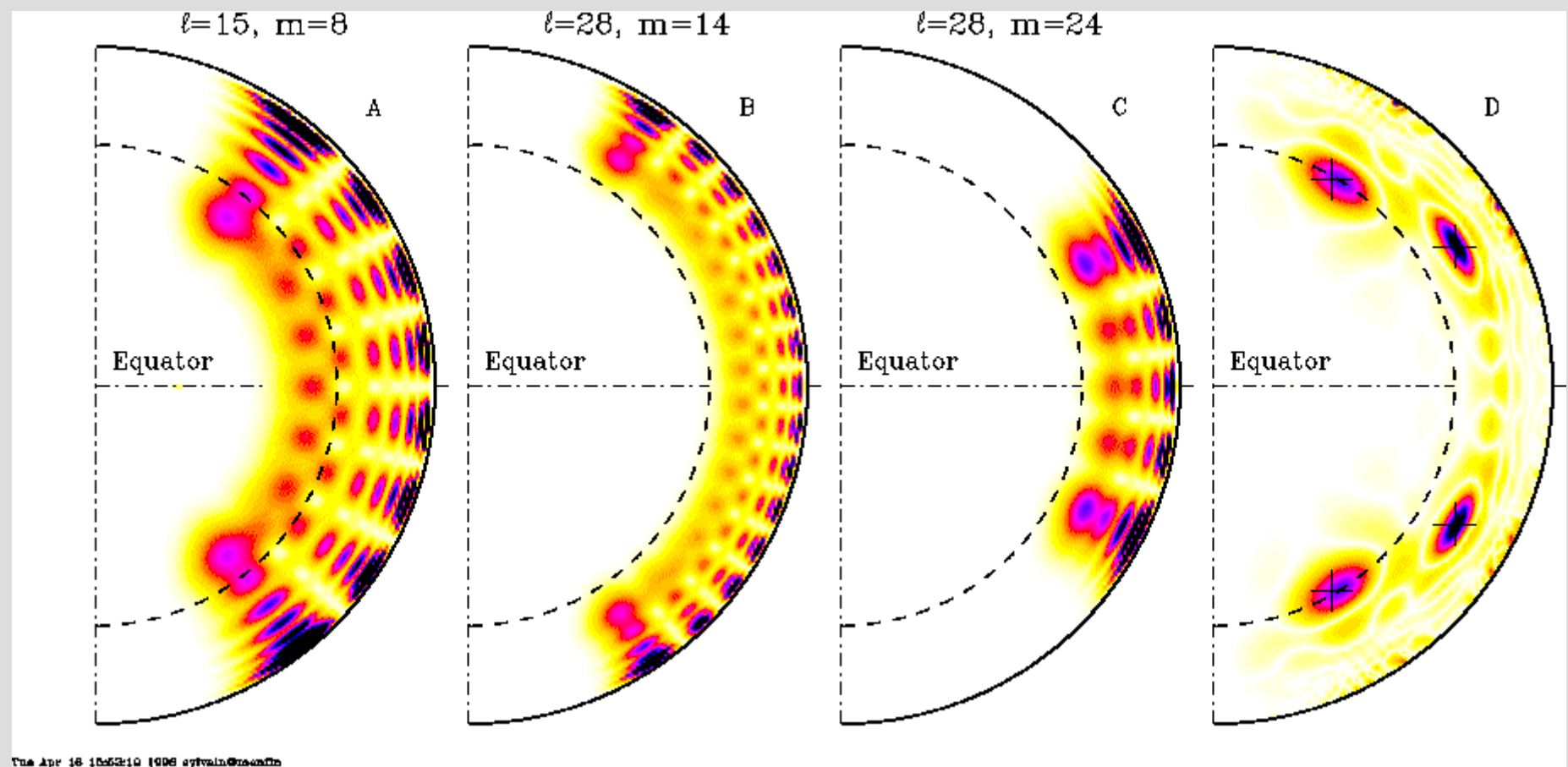
- Pokud pouze radiální závislost rotace, pak

$$\Delta \omega_{nlm} = \omega_{nlm} - \omega_{nl0} = m \beta_{nl} \int_0^{R_0} K_{nl}(r) \Omega(r) \, dr$$

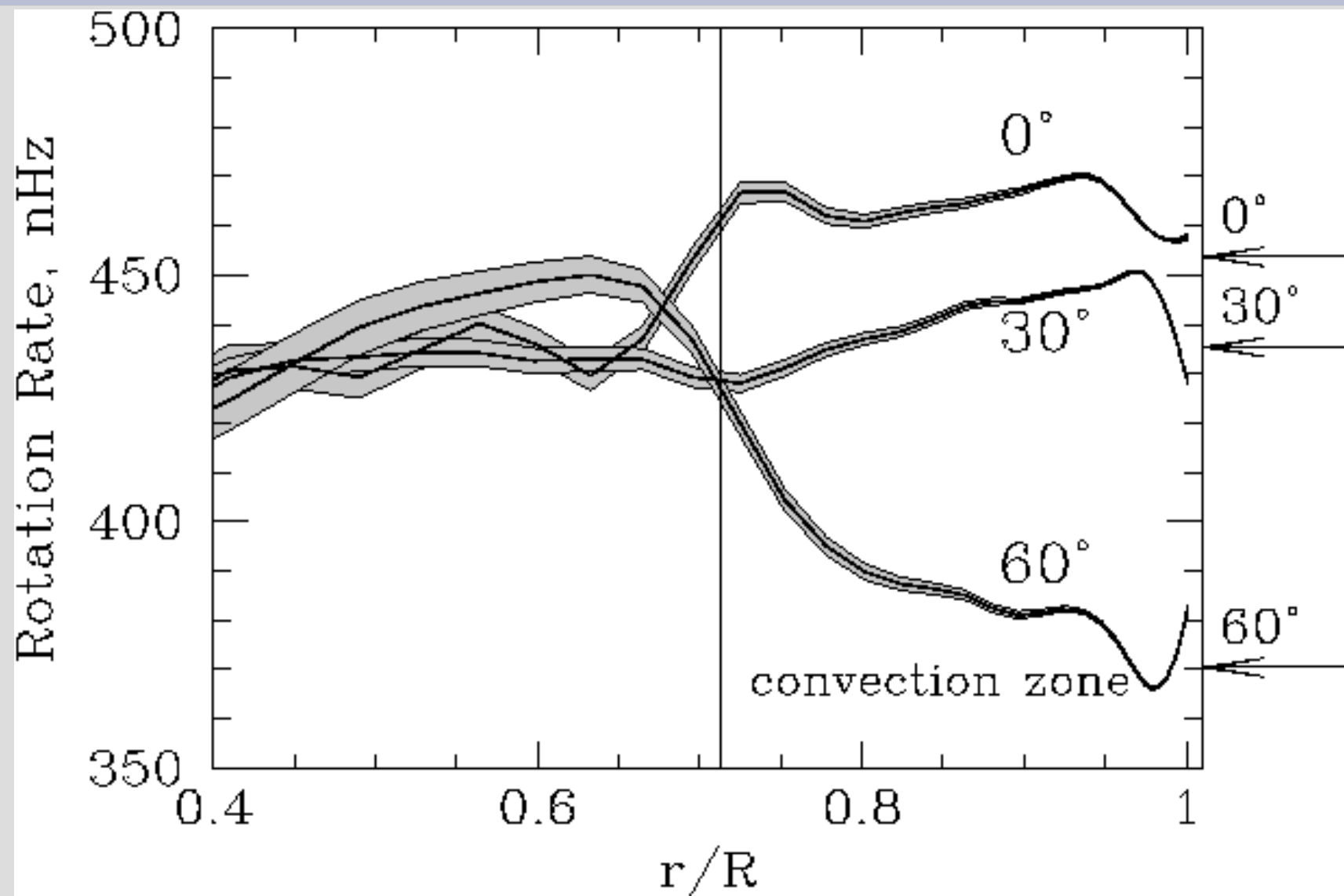
- I se šířkovou závislostí – rozklad do polynomů

$$\Delta \omega_{nlm} = 2\pi l(l+1) \sum_i a_i P_i(-m/l(l+1))$$

Rotace (2)



Rotace (3)

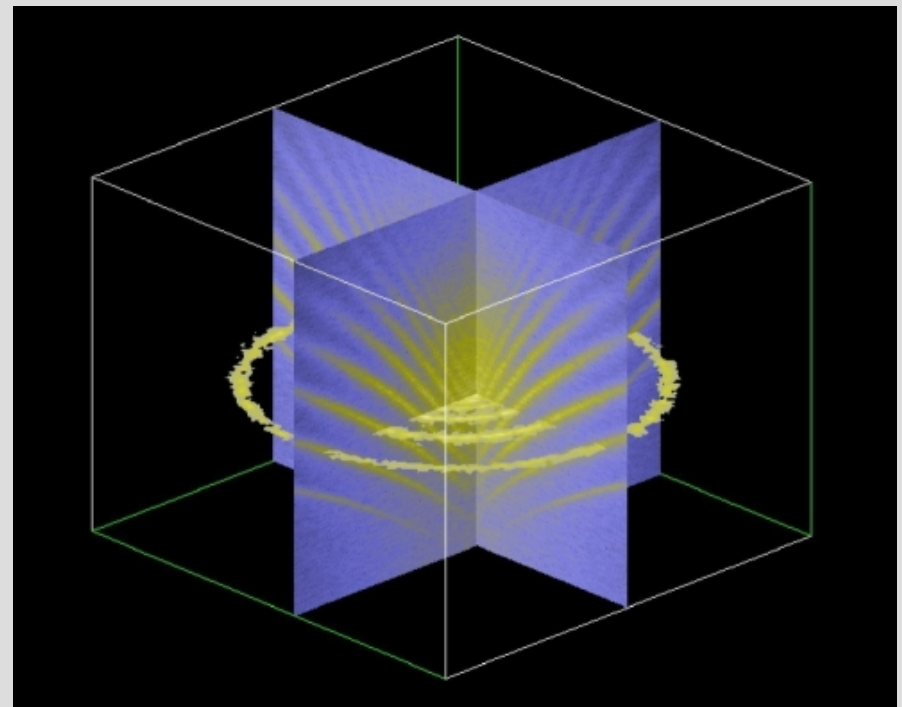


Lokální helioseismologie (1)

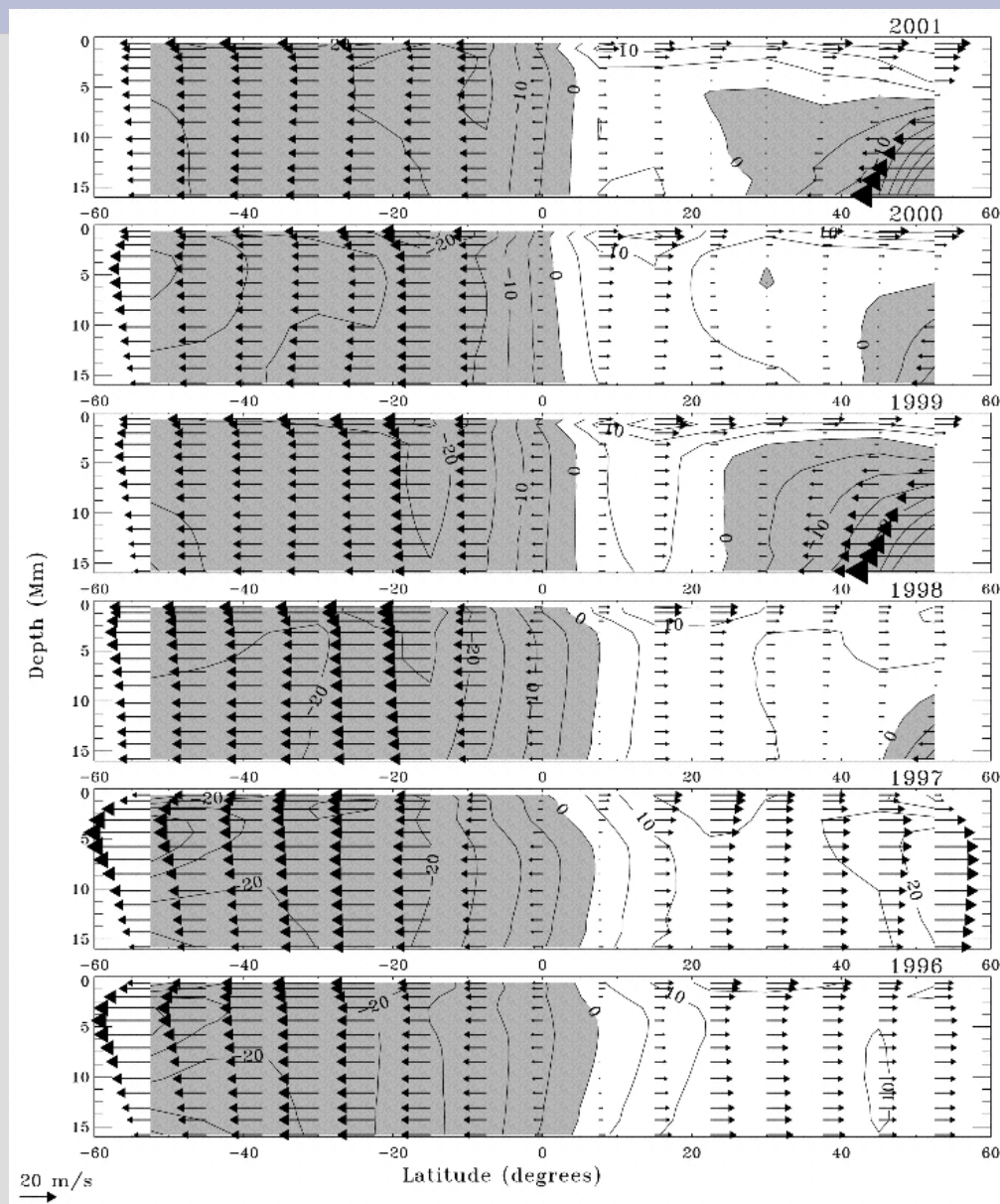
- Globální oscilace – obecně zprůměrovány přes heliografické délky, poruchy symetrické vůči rovníku, nejasná reakce na nehomogenity
- Pole vln v dané oblasti ovlivněno poruchami (nehomogenitami) mezi povrchem a bodem obratu vlny
- Nemožné konstruovat přímou úlohu a tedy obrácená úloha nejednoznačná

Lokální helioseismologie (2)

- *Ring diagram*
 - Frekvence ovlivněny odnosem plazmatu
 - $(t, x, y) \rightarrow (\omega, k_x, k_y)$
 - Analýza pro $\omega = \text{konst}$
 - Mapování podpovrchových rychlostí
 - Horizontální průměr oblasti



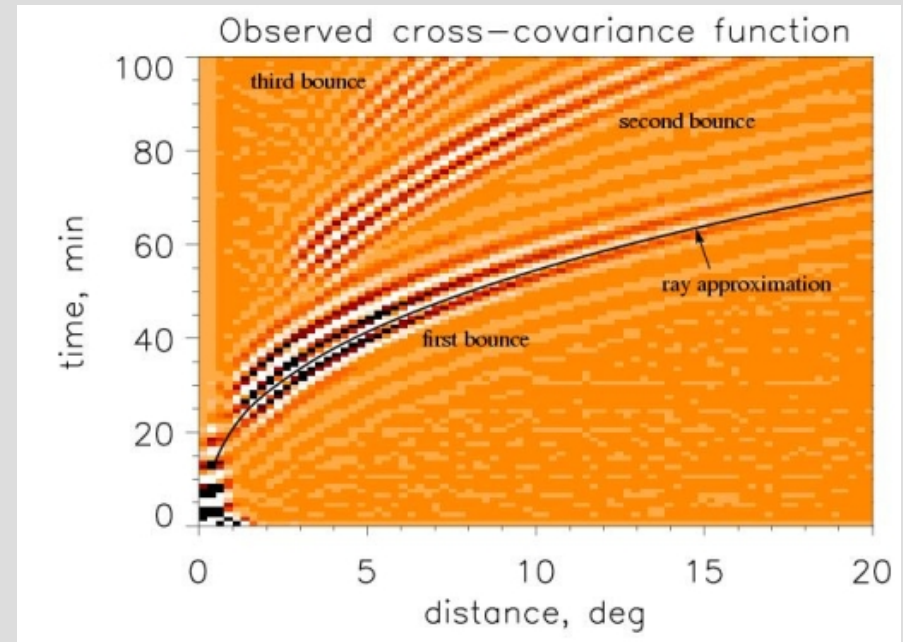
Lokální helioseismologie (3)



Lokální helioseismologie (4)

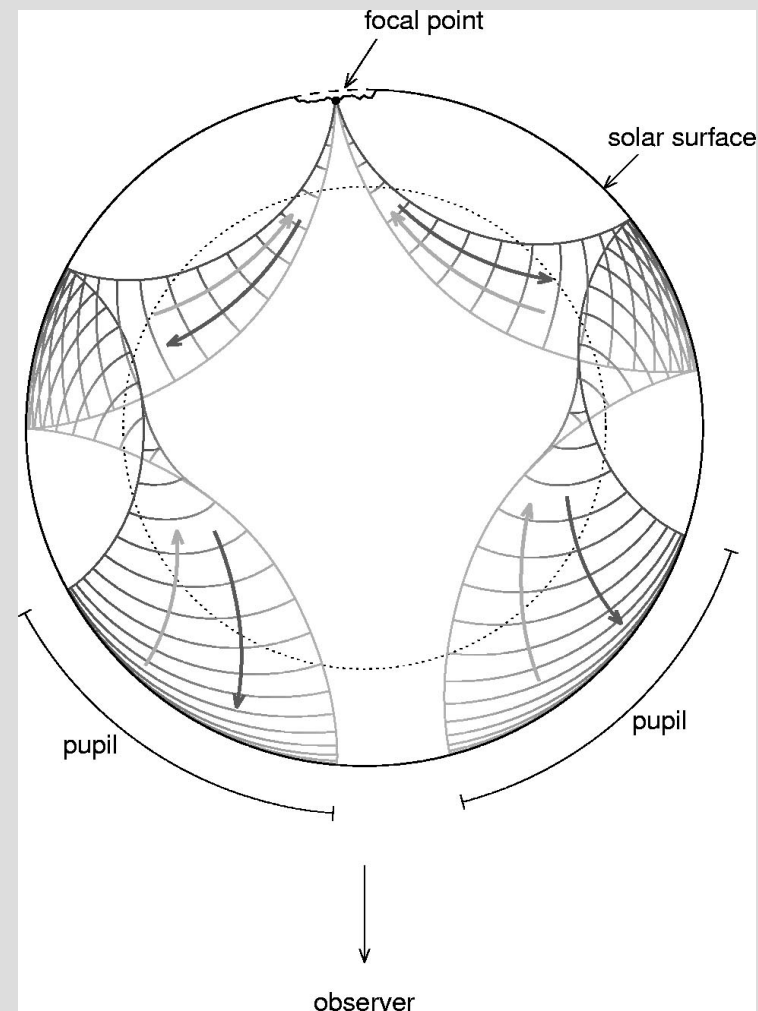
- *Time-distance*
 - Čas minimalizující korelaci mezi dvěma body = cestovní čas
 - Pro dostatečné množství vln = lze invertovat:

$$\tau(t) = \int_{\Gamma} \frac{ds}{c_w(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}}$$



Lokální helioseismologie (5)

- *Helioseismická holografie*
 - Koherentní kombinace p -modů, zejména fázová informace, k mapování rozptylových oblastí na odvrácené straně



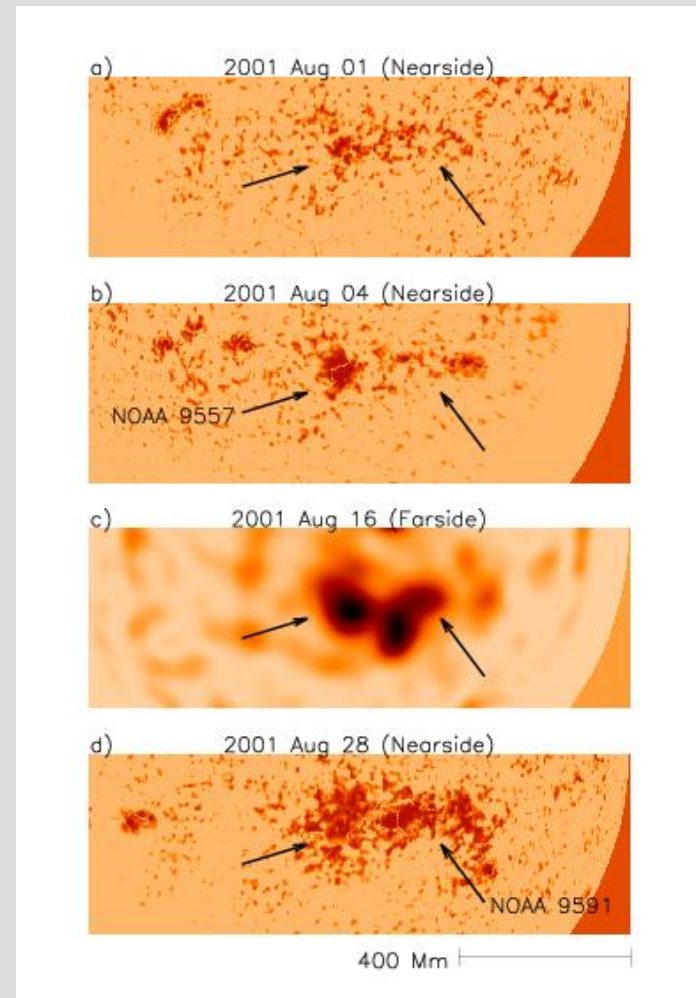
Důležité výsledky (1)

- Struktura těsně pod sluneční skvrnou
 - Time-distance
 - Spíše PR (na úkor přesnosti)



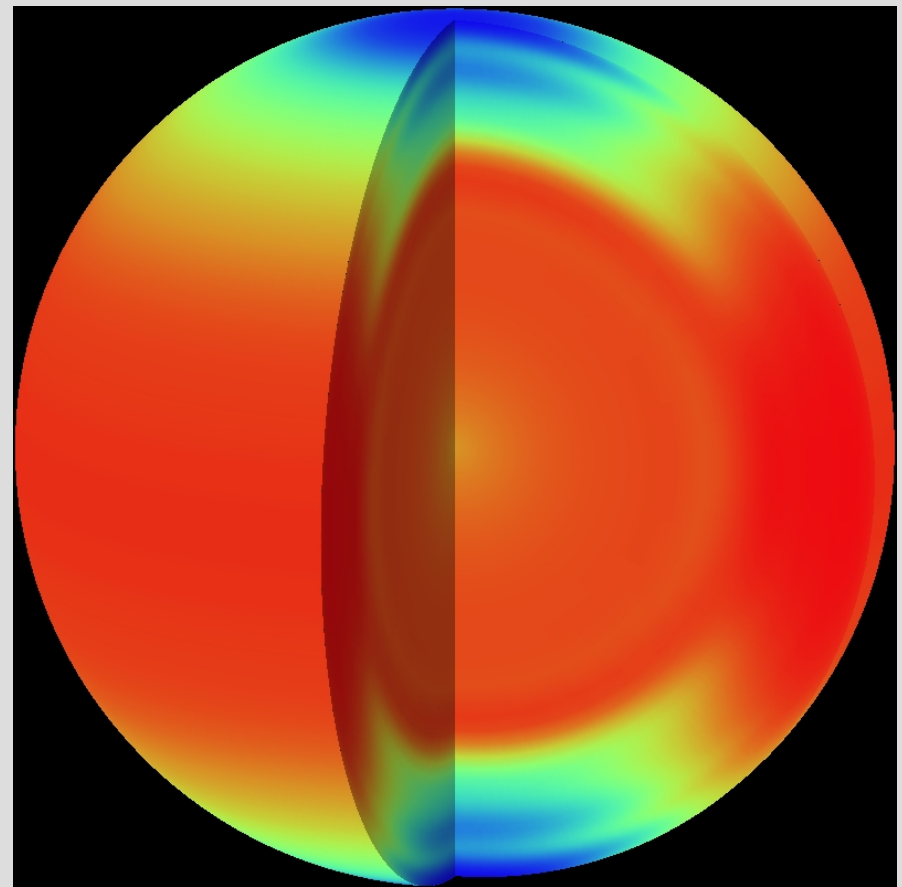
Důležité výsledky (2)

- Sluneční aktivita na odvrácené straně
 - Pomocí helioseismické holografie
 - Zpřesnění předpovědí sluneční aktivity



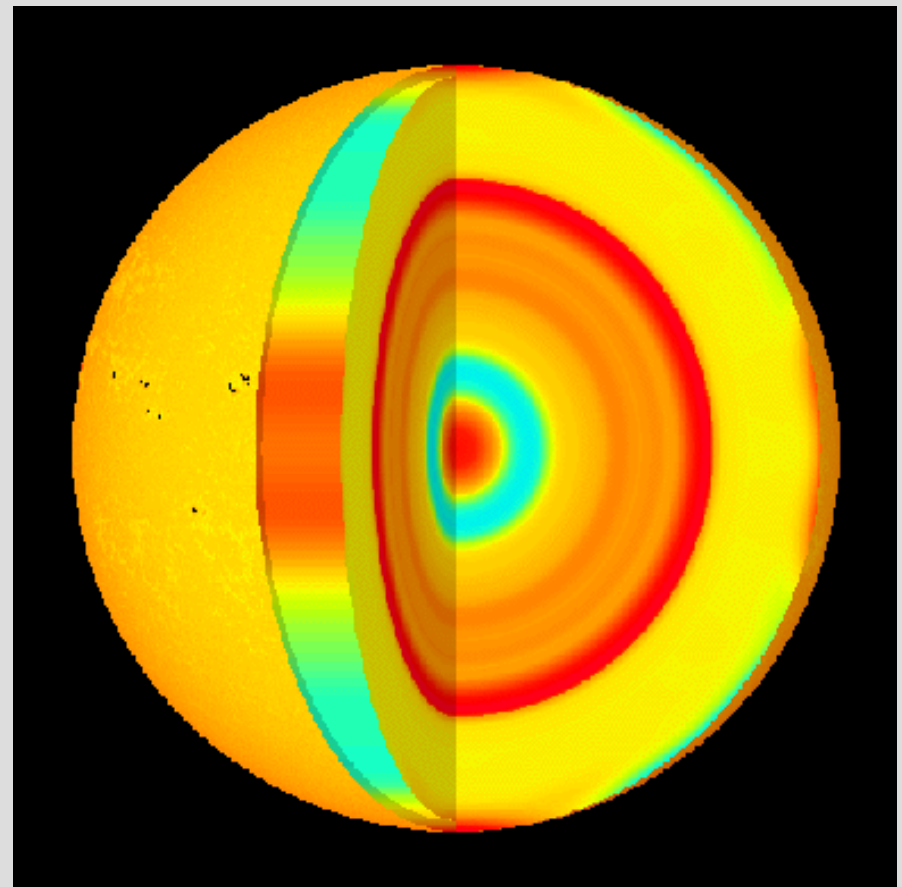
Důležité výsledky (3)

- Vnitřní rotace
 - Konvektivní zóna rotuje konstatně po radiálních křivkách
 - Radiativní zóna a jádro rotuje téměř rigidně (pomaleji než fotosféra)



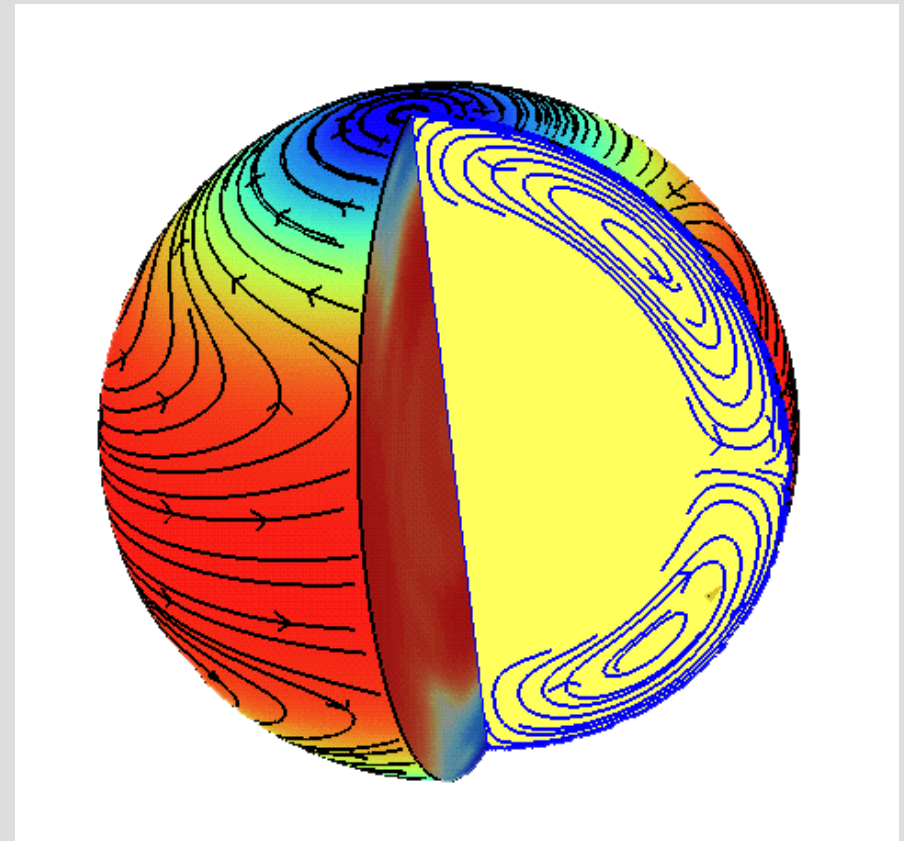
Důležité výsledky (4)

- Vnitřní rychlost zvuku
 - Jednoznačně identifikovatelné hranice vnitřní stratifikace



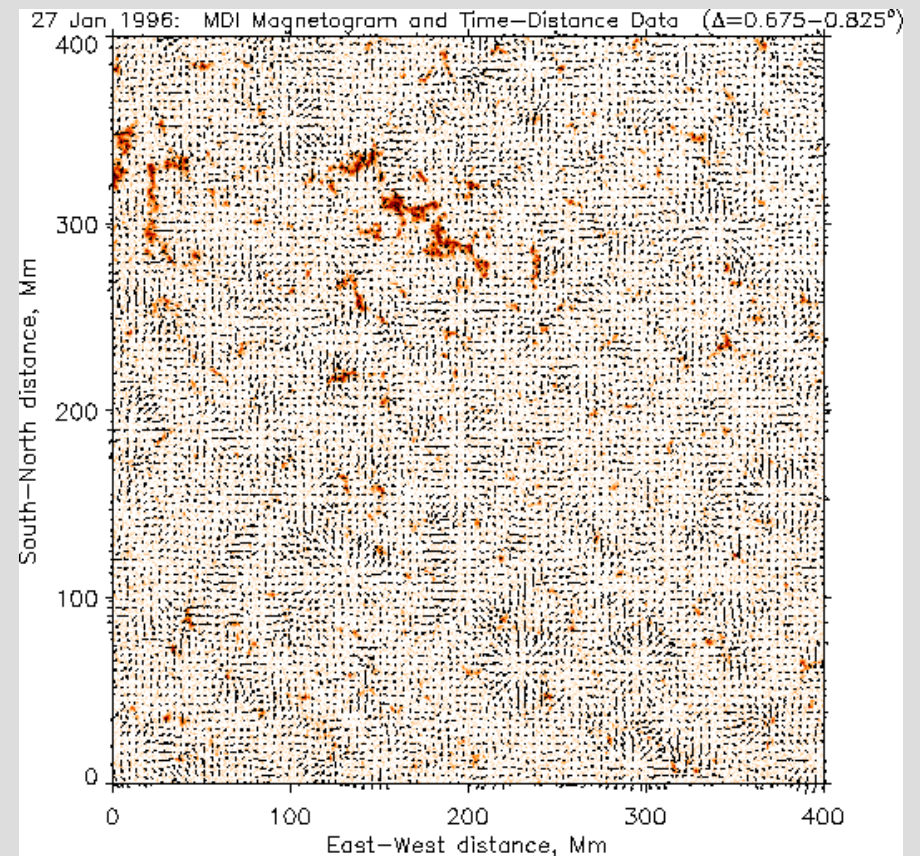
Důležité výsledky (5)

- Podpovrchové proudění
– time-distance



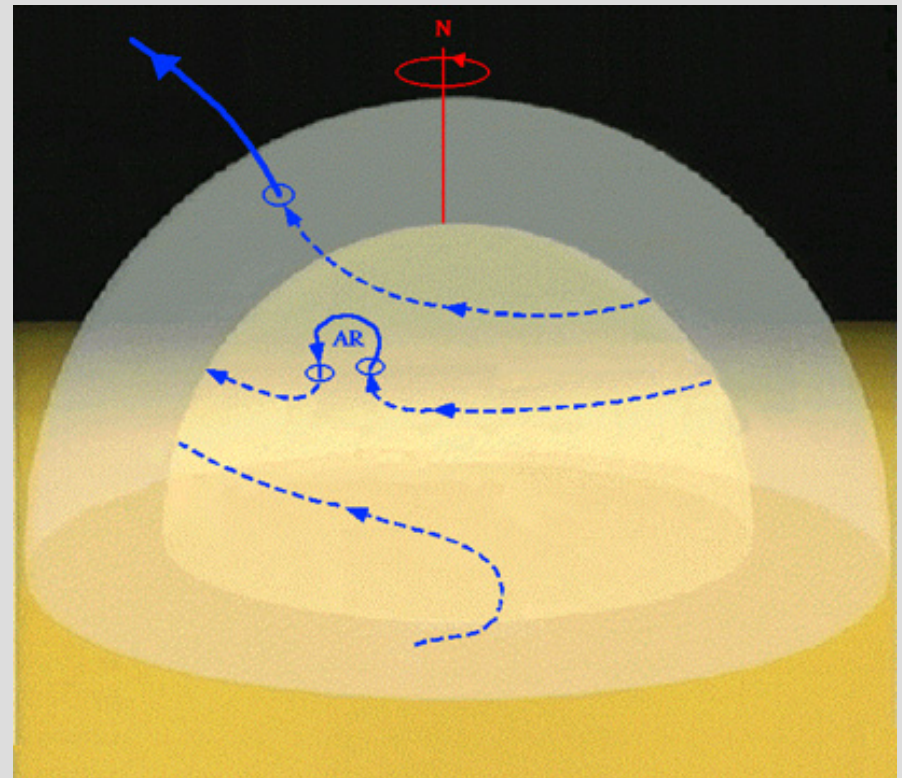
Důležité výsledky (6)

- Horizontální proudění v aktivní oblasti
– time-distance



Důležité výsledky (7)

- Poloha dynama



Perspektivy helioseismologie

- **VELKÉ !**
- HMI@SDO – vyhodnocování měření on-board
- Třeba doladit nejistoty zejména lokální helioseismologie (v podstatě žádná informace o chybě měření)
- Rozvoj asteroseismologie – vnitřní struktura hvězd jiných typů