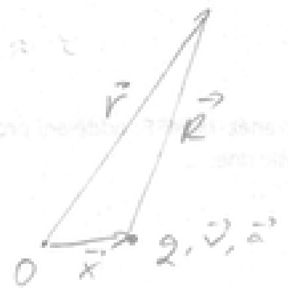
Lienard – Wiechert . (Padmanabhan I, p. 153)

• STR notace $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, ale předp. $v \ll c$,

tj. $t \equiv x^0 \approx \tau$

$u^\alpha(\tau) = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \qquad u^0 \approx 1$



$$J^\alpha(x) = q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \delta(x^\alpha - x^\alpha(\tau))\, u^\alpha(\tau)$$

$\Box A^\alpha = 4\pi J^\alpha$ zavedeme $T = it$ a budeme pracovat ve 4D komplexním prostoru ; $\Box \to \Delta_4$

$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Řešení metodou Green. funkcí :

$\Box Q(x) = P(x)$

retardovaná Green. funkce D_R $\quad \Box D_R(x) = \delta(x)$

$\Updownarrow$

$D_R(t, x) = 0$ pro $t < 0$

potom $Q(x) = \int d^4x'\, D_R(x - x')\, P(x')$ $\qquad (d^4x' = dT\,dx\,dy\,dz)$

přepsání $\Box$ do sfér. souř. a z předp. sfér. sym. $\quad D_R(x) \propto \frac{1}{x^2}$

konstanta určíme integrací přes 4-kouli o pol. S

$$1 = \int d^4x\, \Box D_R = \int d\vec{\Sigma} \cdot \nabla D_R = -4\pi^2 C \quad \left(d\Sigma = 2\pi^2 S^3 \vec{n}, \nabla D_R = -\frac{2C}{S^3}\vec{n} \right)$$

$$\to \quad Q(x) = -\int \frac{d^4x'}{4\pi^2} \frac{P(x')}{(x - x')^2}$$

použijeme na náš problém $\to$

$$A^\alpha(r) = -\int \frac{d^4x'}{\pi} \frac{J^\alpha(x')}{(r^\alpha - x'^\alpha)^2} = -\iint_{-\infty}^{\infty} d\tau\, d^4x' \frac{q}{\pi} \frac{\delta(x'^\alpha - x^\alpha(\tau))\, u^\alpha(\tau)}{(r^\alpha - x'^\alpha)^2} =$$

$$= -\frac{iq}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{u^\alpha(\tau)}{(r^\alpha - x^\alpha)^2} \qquad \left(d^4x' = i\,dt\,dx\,dy\,dz ;\ \text{integrace } \delta\text{-funkce ve dtě přes } dt\,dx\,dy\,dz \right)$$

$r^\alpha - x^\alpha = R^\alpha \qquad \frac{dR^2}{d\tau} = -2R^A u_A$

$$A^\alpha(r) = -\frac{iq}{\pi} \int dR^2 \frac{u^\alpha(\tau)}{R^2} \left| \frac{dR^2}{d\tau} \right|^{-1}$$

– pól na reálné ose + int. $\to 0$ v $R = 0$, tj. $t + \dots$

$\to$ reziduová věta $2\pi i \cdot$ Res

$$A^\alpha(r) = \frac{q u^\alpha}{R^A u_A} \bigg|_{ret}$$ pro $u^0 = 1$ to dává L-W pot. ve EM1

Záření urychleného náboje

EP1

Lienard-Wiechert potenciál (v CGS):

$$\varphi = \frac{q}{\left(R - \frac{\vec v\cdot\vec R}{c}\right)} \qquad \vec A = \frac{q\vec v}{c\left(R - \frac{\vec v\cdot\vec R}{c}\right)}$$

$\vec r$ = poloha pozorovatele

$\vec x(t)$ = poloha náboje, $\vec v = \dot{\vec x}$

předp.: $|\vec x| \ll |\vec r|$!

$$\vec R = \vec r - \vec x(t), \quad |\vec R| \approx r - \vec x\cdot\vec n, \quad \vec n = \frac{\vec r}{r}$$

$$t' = t - \frac{1}{c}|\vec r - \vec x(t')| \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\vec x\cdot\vec n}{c} \approx t - \frac{r}{c}$$

$$A(t,r) \approx \frac{1}{cr}\sum_i q_i v_i(t') \approx \frac{1}{cr}\sum_i q_i v_i\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\dot d(t - r/c)}{cr}$$

$d = \sum_i q_i x_i$ = dipólový moment zdroje

$$B = \nabla\times\vec A \approx \frac{\dot{\vec A}\times\vec n}{c} \approx \frac{1}{c^2 r}\left(\ddot{\vec d}\times\vec n\right)$$

(použili jsme: $\nabla\times\vec A(r) = \vec n\times\frac{\partial\vec A}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}$ dává člen rychle jdoucí k nule → zanedbali jsme to)

záření pole: $\vec E = \vec B\times\vec n = \frac{1}{c^2 r}\left(\ddot{\vec d}\times\vec n\right)\times\vec n$

Poynting: $\vec S = \frac{c}{4\pi}\left(\vec E\times\vec B\right) = c\frac{B^2}{4\pi}\vec n \left(= \frac{d\mathcal E}{dt\,d\vec\Sigma}\right)$

$$\frac{d\mathcal E}{dt\,d\Omega} = |S|r^2 = \frac{cB^2r^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi c^3}\left(\ddot{\vec d}\times\vec n\right)^2 = \frac{|\ddot d|^2}{4\pi c^3}\sin^2\Theta$$

$$\frac{d\mathcal E}{dt} = \frac{|\ddot d|^2}{4\pi c^3}\int_0^\pi 2\pi\sin^2\Theta\,\sin\Theta\,d\Theta = \frac{2|\ddot d|^2}{3c^3} = \frac{2q^2|a|^2}{3c^3}$$

↑ Larmorův vzorec

v SI by to bylo: $\frac{d\mathcal E}{dt} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{q^2|a|^2}{c^3}$

záření odnáší energii → „brzdné záření“

David H – Mat/Vyuka 19.2.2019

Rybicki & Lightman : Radiative processes in astrophysics

Bez účinků záření ... $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{EXT.}$ Výkon vyzář. části ... $P = \frac{q^2 \cancel{\ } \ddot{r}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{EXT.} + \vec{F}_{RAD.}$ Zach. energie – na čas. interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ $\int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{RAD} \cdot \dot{\vec{r}}\, dt = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{q^2 \ddot{r}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\, dt$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{RAD} \cdot \dot{\vec{r}}\, dt = -\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \left\{ \left[\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right]_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{r}} \cdot \dddot{\vec{r}}\, dt \right\}$$

Pokud $\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}(t_2) = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}(t_1)$

$$\Rightarrow \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_{rad} - \frac{q^2 \dddot{\vec{r}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \right) \cdot \dot{\vec{r}}\, dt = 0$$

Položíme $\boxed{\vec{F}_{RAD} = \frac{q^2 \dddot{\vec{r}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = m\tau \dddot{\vec{r}}}$

Pozor na nefyzikální řešení – např. pro $\vec{F}_{EXT} = 0$

$$m(\ddot{\vec{r}} - \tau \dddot{\vec{r}}) = 0 \quad \begin{cases} \ddot{\vec{r}} = \vec{v}_0 \\ \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_0 e^{\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

[nesplňuje $\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}(t_2) = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}(t_1)$

nastává velké změny za čas τ

Alternat. $\vec{F}_{rad} = m\tau \dddot{\vec{r}} = \tau \frac{d}{dt}(m\ddot{\vec{r}}) \simeq \tau \frac{d\vec{F}_{EXT}(\vec{r}, t)}{dt}$

$$\underline{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{EXT} + \tau \frac{d\vec{F}_{EXT}}{dt} = \vec{F}_{EXT.} + \tau \left[\frac{\partial \vec{F}_{EXT}}{\partial t} + (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}_{EXT} \right]}$$ ... bez patolog. řešení