Liouville & $I_\nu / \nu^3 = \text{const.}$

EP5

- zachování 6-ti rozměrného objemu ve fáz. prostoru
  + lze interpretovat jako invarianci vůči SLT
  + když se zachovává podél světočáry

$$V \equiv \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p^x \Delta p^y \Delta p^z = V_x V_p = \text{const.}$$

- začneme tou SLT,
- rest frame označíme $\bar{x}, \bar{p}$, pohybují se rychlostí β ve směru x

$$\bar{A}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} t \\ x \\ y \\ z \end{array} \end{array}$$

$$x = \gamma(\bar{x} + \beta\bar{t}) \qquad x' = \gamma(\bar{x}' + \beta\bar{t}')$$

$$\Delta\bar{x} = \bar{x}' - \bar{x} \qquad \Delta\bar{t} = 0$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta\bar{x} + \beta\Delta\bar{t}) - \beta\Delta t = \Delta\bar{x}/\gamma = \Delta\bar{x}\,\frac{m_0}{p^0}$$

korekce inteligentního pozorovatele, který ví, že $\Delta t \neq 0$, tj. značka na „vzdálenějším" konci udělal později, a tedy se odečte vzdál. o jakou ujel

$$\bar{p} = (m_0, 0, 0, 0) \qquad \bar{p}' = (\underbrace{\sqrt{m_0^2 + (\Delta\bar{p}^x)^2}}_{\equiv \Delta\bar{p}^0}, \Delta\bar{p}^x, 0, 0)$$

$$p = (\gamma m_0, \gamma\beta m_0, 0, 0), \quad p' = (\gamma\Delta\bar{p}^0 + \gamma\beta\Delta\bar{p}^x, \gamma\Delta\bar{p}^x + \gamma\beta\Delta\bar{p}^0, 0, 0)$$

vždy platí: $(p^0)^2 - (p^x)^2 = m_0^2$

$$p'^x \approx \gamma\Delta\bar{p}^x + \beta\gamma m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\bar{p}^x}{m_0}\right)^2\right] \approx \gamma\Delta\bar{p}^x + \beta\gamma m_0$$

$\rightarrow \Delta p^x = p'^x - p^x = \gamma\Delta\bar{p}^x$

$\rightarrow m_0 V_{\bar{x}} = p^0 V_x \quad , \quad V_{\bar{p}}/m_0 = V_p/p^0 \Rightarrow V_{\bar{x}} V_{\bar{p}} = V_x V_p$

- pro $m_0 = 0$ se udělá lim $m_0 \to 0$ při zachování p_0

$p^0 V_x$ a V_p/p^0 budou stále dobře definované a mělo by vyjít totéž

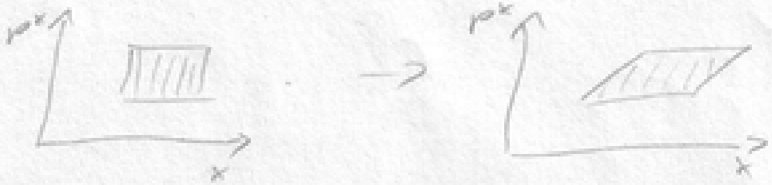
- ta limita by měla být $m_0 \to 0 \wedge \beta \to 1 \wedge p^0 = m_0/(1-\beta^2) \to$ konečné číslo

$dV/d\lambda = 0$ (MTW, box 22.6)

EP6

- invariance objemu ve fáz. prostoru podél nějaké dráhy parametrizované afinním parametrem λ
- comoving frame „centrální" částice + malé okolí → transformace jako v klasice, $\frac{dx^i}{dt} = \frac{p^i}{m}$, neboli posun v x za čas δt je úměrný p^i (která se zachovává)

→ deformace zachovávající objem



→ $\frac{dV}{d\tau} = \frac{\delta(\Delta x \Delta p^x \Delta y \Delta p^y \Delta z \Delta p^z)}{\delta t} = 0$, protože pro každou dvojici souřadnice-hybnost se $\Delta x^i \Delta p^i$ zachovává

$\tau = a\lambda + b \Rightarrow \frac{dV}{d\lambda} = 0$

$m = 0$:

- systém, v němž má „centrální" částice hybnost $P = p^0(e_0 + e_x)$
- částice v malém okolí mají $p^y \ll p^0$, $p^z \ll p^0$ a

$p^x = p^0 + O\left(\frac{(p^y)^2}{p_0}\right) \approx p^0$

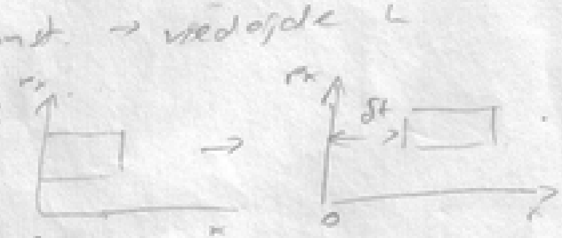
$p^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \to \frac{dy}{dt} = \frac{p^y}{p^0}, \ \frac{dz}{dt} = \frac{p^z}{p^0}, \ \frac{dx}{dt} = 1 + O\left(\left(\frac{p^y}{p^0}\right)^2\right) \approx 1$

$\frac{dt}{d\lambda} = p^0$

→ u y a z je lin. závislost posunutí na p^y a p^z

→ stejný příklad, jako pro $m \neq 0$

- u x je pro změnu $\frac{dx}{dt} = \text{const}$ → nedojde k deformaci, jen se interval posune:



→ $\frac{dV}{dt} = 0$, $t = p^0\lambda \to \frac{dV}{d\lambda} = 0$

$I_\nu / \nu^3 = \text{const.}$

$\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{n}$ $\quad d^3p = p^2\,dp\,d\Omega = \frac{h^3}{c^3}\nu^2\,d\nu\,d\Omega$, $\quad d^3x = c\,dt\,dA$

$dE = I_\nu\,dA\,dt\,d\Omega\,d\nu = h\nu\,dN$ $\oplus$ $d^3p\,d^3x$ invariantní

invariant → $\frac{I_\nu}{\nu^3} = \text{const}$