Model pulzaru (vyrovnaný rotátor)

EP 17

- představa: rotující vodivá koule s mg. polem

$$\vec{B} = \frac{B_0 R_*^3}{2r^3}\left(2\cos\vartheta\,\vec{e}_r + \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta\right)$$

- je to klasický tvar dipólu, který se dostane od smyčky s mg. momentem $\vec{m} = I\,\Delta\vec{S}$ a lze jej alternativně zapsat jako:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left(\frac{3\,\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^2}\vec{r} - \vec{m}\right)$$

(úplně obecně je to: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$)

- vně hvězdy předp. (nyní) vakuum →

$$\Delta\varphi_e = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\right]\varphi_e = 0$$

- řešení: $\varphi_e = \frac{C_1}{r^3}P_2(\cos\vartheta) + C_2$

- $P_2(\cos\vartheta) = \frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}$ ... Legendrův polynom 2. řádu

- spojitost na povrchu (tečná složka $E = E_\vartheta$) dává:

$$\varphi_e = -\frac{B_0\Omega R_*^5}{3r^3c}P_2(\cos\vartheta)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi_e = -\frac{B_0\Omega R_*^5}{cr^4}\left(P_2(\cos\vartheta)\,\vec{e}_r + \sin\vartheta\cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta\right)$$

- indukovaný plošný náboj na povrchu:

$$\sigma_e = \frac{1}{4\pi}\left[\lim_{r\to R_*^+}E_r - \lim_{r\to R_*^-}E_r\right] = -\frac{B_0\Omega R_*}{4\pi c}\cos^2\vartheta$$

→ silné el. pole → vytrhávání nabitých částic

→ nabitá magnetosféra → narušení pův. předpokladu vakua vně hvězdy

- finálně tedy: $r < R_*$: $E\cdot B = 0$ (díky force-free)

$$r > R_*: \quad E\cdot B = -\frac{\Omega R_*}{c}\frac{R_*^7}{r^7}B_0^2\cos\vartheta$$

$a = (a_x, a_y, a_z)$

$\boxed{EP\ 176}$

$$v_T \times B_P + v_P \times B_T = v_\varphi B_z \vec{e}_R - v_\varphi B_R \vec{e}_z - B_\varphi v_z \vec{e}_R + B_\varphi v_R \vec{e}_z +$$

$$= v_\varphi \frac{\nabla\psi}{R} - B_\varphi \{ B_z \vec{e}_R + B_\varphi \} B_R \vec{e}_z = \frac{v_\varphi - 3B_\varphi}{R} \nabla\psi$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$E_\vartheta = +\frac{3C_1}{r^4} \cos\vartheta \sin\vartheta$ $\quad$ $E_r = +\frac{3C_1}{r^4} P_2(\cos\vartheta)$ $\quad$ OUT $\quad E = -\nabla\varphi$

IN: $\quad E = -\frac{v}{c} \times B$ $\quad$ $v_\varphi = \Omega r \sin\vartheta$ $\quad$ (r, φ, ϑ) ! $\vartheta = -z$!

$$E_\vartheta = -\frac{v_\varphi}{c} B_r = -\frac{B_0 R_*^3 \Omega}{c r^2} \sin\vartheta \cos\vartheta \rightarrow C_1 = -\frac{B_0 R_*^3 \Omega R_*^2}{c\, 3}$$

$$E_r = +\frac{\Omega r B_0 R_*^3}{2c\, r^3} \sin^2\vartheta$$

$E_{r-} = +\frac{\Omega R_* B_0}{2c} \sin^2\vartheta$ $\quad$ $E_{r+} = +\frac{\Omega B_0 R_*}{2c} (3\cos^2\vartheta - 1)$

$$\sigma_e = +\frac{\Omega R_* B_0}{4\pi c} \cos^2\vartheta$$

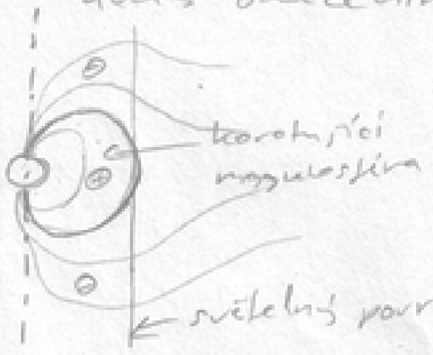
potřeboval bych $\quad E = \frac{v}{c} \times B$ $\quad$ (φ s opačným znaménkem, aby to vyšlo správně)

jestli ho dobře vnímám, tak problém řeší orientace $e_\vartheta = -e_z$ popsaná výše

EP18

Magnetosféra

- v případě, že je mg. pole zamrzlé do plazmatu, dochází k deformaci mg. siločar kvůli omezením teorie relativity ($v<c$)
- zjednodušený model:
  - siločáry pod $R_L = \frac{c}{\Omega}$ mají klasický tvar
  - siločáry nad R_L jsou uzavřené v nekonečnu
  - ano, je to nekonzistentní



Energie záření

- předpokládejme si, že záření pochází od těch siločar uzavřených v nekonečnu, resp. od částic, které podél nich mohou do nekonečna utíkat
- kritický úhel – místo na povrchu, z nějž vychází siločára, která se dotýká světelného kužele
  - určí se díky tomu, že mg. tok uzavřenou plochou $= 0$
  - plocha se zvolí buď – na povrchu $\vartheta \in \langle 0, \vartheta_c \rangle$, tak podél siločáry (tak je z definice 0) a na $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ polorovina vyjma $r<R_L$ ⊕ uzavření v ∞, kde se předp. nulový tok →

$$\Phi_1 = 2\pi \int_0^{\vartheta_c} R_*^2 \sin\vartheta \, B_r \, d\vartheta = 2\pi B_0 R_*^2 \int_0^{\vartheta_c} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta = \pi B_0 R_*^2 \sin^2\vartheta_c$$

$$\Phi_2 = 2\pi \int_{R_L}^{\infty} B_\vartheta R \, dR = \pi B_0 R_*^3 \int_{R_L}^{\infty} \frac{1}{R^2} \, dR = \frac{\pi B_0 R_*^3}{R_L}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow \sin^2\vartheta_{c} = \frac{R_*}{R_L} = \frac{\Omega R_*}{c}$$

+ z pohledu výše uvedeného předpokladu, že „klasické" siločáry jsou pod R_L, je to tedy trochu divné. Lze integrovat po ploše, která bude uzavírat polosféru od R_L – vyjde to samozřejmě stejně (odvodit, [illegible] bude-li čas) a není tam tak markantní rozpor

EP 19

- plocha, ze které vycházejí unikající silokřivky a částice: $A = \pi R_*^2 \sin^2\vartheta = \pi \Omega R^3 / c$

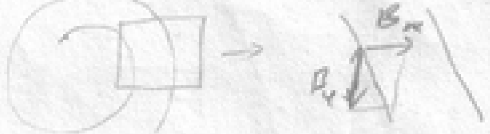
- hustota náboje v magnetosféře nad pólem (z force-free):
$$\rho_e = \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot E = \frac{1}{4\pi c}\nabla\cdot\left((\Omega\times r)\times B\right) = \frac{1}{4\pi c}\Omega B_0$$

- proud částic
$$\dot N \sim 2\frac{\rho_e}{e} A c = \frac{1}{2e}\Omega^2 B_0 R_*^3$$

- mg. tok procházející pol. čepičkami
$$\Phi_m \approx \frac{\pi B_0 \Omega R_*^3}{c}$$

- mg. pole ve velkých vzdálenostech – při pohledu z osy budou silokřivky zatočeny do spirály

na velkých r: $\Phi_m \approx r^2 B_r$



– částice se může pohybovat rychlostí c v rad. směru a přitom zůstat „navlečená" na silokřivce rotující přib. rychlostí $r\Omega$, pokud
$$\frac{B_\varphi}{B_R} \sim \frac{r\Omega}{c} \to B_\varphi \approx \frac{\Omega}{rc}\Phi_m \approx \frac{\pi\Omega^2 B_0 R_*^3}{2c^2 r} > B_r, B_\vartheta$$

Poynting: $P \approx \frac{c}{4\pi}\int (E\times B)\cdot dS \approx c B_\varphi^2 r^2 \approx \frac{\pi^2}{4c^3}\Omega^4 B_0^2 R_*^6$

Kinetická energie $\mathcal{E} \propto \Omega^2 \to \dot{\mathcal{E}} \propto \Omega\dot\Omega \propto \Omega^4 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \underline{\dot\Omega \propto \Omega^3}$$

- vyrovnaný rotátor by ve skutečnosti nezářil, ale řádově výsledek to vyšlo srovnatelné se zářením skloněného rotujícího dipólu, které je (viz Landau & Lifšic) $\propto m^2\Omega^4\sin^2\beta$

Řeči a pár čísel

EP 20

- neutronové hvězdy ($M \sim 2 M_\odot$; $R \sim 10\,km$)
- frekvence $1 \sim 1000\,Hz$
- mg. pole $\sim 10^{13}\,G = 10^{9}\,T$
- el. pole $\sim 10^{13}\,V/cm$
- zpomalování: $P/\dot{P} \sim 10^{4}\,yr$ – pozorované rádiové zář. nenese dost energie – je to patrně dlouhodobý jev
- doba trvání pulzu $\sim 0{,}1\,P$ → rozevření kuželu $\sim 10^{\circ}$
- zář. rotujícího dipólu není detekováno – patrně pohlceno v mezihvězdném plazmatu (tohle by chtělo dohledat a dopočítat a v optimálním případě z toho udělat příklad na nějaké mezní frekvence)
- rentgenové pulsary – zcela jiný model, předpokládá se přetok hmoty ve dvojhvězdném systému
- náhlé změny (zkrácení) periody způsobené změnou struktury (kontrakce) – hvězdotřesení
- PSR 1913+16 – nepřímá detekce grav. vln.