rovnice přenosu záření (Padmanabhan)

- na zač. semestru jsme odvozovali přehled kinetickou teorii pro fotony
- jedním z důsledků bylo $dE = I_\nu \, dS \, dt \, d\Omega \, d\nu = h\nu \, dN \Rightarrow I_\nu/\nu^3 = \text{konst.}$

Boltzmannova rovnice (vnitřní zápis)

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \frac{dp^i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial p^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_{coll} \qquad (p^0 = |p| \; ; \; \lambda \propto t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp^i}{dt}\frac{\partial f}{\partial p^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$$

(už výše jsme předp. $\dot p^0 = 0$)

- 1. aproximace: bez vnějších polí (např. grav.) $\dot p = 0 \rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec v \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \frac{\partial f}{\partial t} + c\vec k \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec x}$$

jedn. vektor

$\nu = \text{konst} \rightarrow f \propto I_\nu \rightarrow$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec k \cdot \frac{\partial I_\nu}{\partial \vec x} = \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right)_{coll}$$

- momenty I_ν:

$$cU_\nu \equiv \int d\Omega \, I_\nu(\vec k) = \text{hustota energie}$$

$$\vec F_\nu \equiv \int d\Omega \, \vec k \, I(\vec k) = \text{tok záření}$$

$$cP^{ij}_\nu \equiv \int d\Omega \, k^i k^j I(\vec k) = \text{tenzor napětí}$$

(integrujeme jen přes úhly, necháváme konstantní $|p|$)

- „srážkový člen"

$$\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right)_{coll} = \frac{\rho j_\nu}{4\pi} - \rho \varkappa^{ab}_\nu I_\nu + \rho \varkappa^{ind}_\nu I_\nu + \ldots$$

spontánní emise, j_ν = emisivita

absorpce ($\rho\varkappa = n\sigma$)

indukovaná emise, zanedbáme (obecně nelin. člen)

rozptyl

⊕ předp. $j_\nu \neq j_\nu(\vec k)$, $\varkappa^{ab}_\nu \neq \varkappa^{ab}_\nu(\vec k)$ (závisí jen na frekvenci)

→ nultý moment Boltzmannovy:

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot F_\nu = \rho(j_\nu - c\varkappa^{ab}_\nu U_\nu)$$

→ první moment (pro $\frac{d\vec k}{dt} = 0$):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^i}{\partial t} + c\frac{\partial P^{ij}}{\partial x^j} = -\rho\varkappa^{ab} F^i$$

• momentové rovnice vždy tvoří neuzavřenou soustavu → potřebujeme další aproximace

1) LTE – stř. volná dráha fotonu $l_\nu \ll R$

→ $I_\nu \approx B_\nu(T)$, $U_\nu \approx \frac{4\pi}{c} B_\nu(T)$ $\qquad B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/k_0 T)-1}$

2) $P^{ij} = P_{rad}\,\delta^{ij}$, $P_{rad} \approx \frac{1}{3}U_\nu$

3) zanedbání čas. derivace $\frac{\partial X}{\partial t} \sim \frac{X}{t_{ch}}$ vs. člen na pravé str. $\sim \rho c \varkappa X$ $\approx \frac{cX}{l_\nu}$ → pokud $\frac{l_\nu}{c\, t_{ch}} \ll 1$ (opt. husté prostředí)

→ 1. moment dává odhad $F^i \approx -\frac{c}{\rho\varkappa_\nu}\frac{\partial P_{rad}}{\partial x^i}$ → $F \sim cU_\nu \frac{l_\nu}{R}$

→ do 0. momentu, kde na levé str. $\nabla\cdot F_\nu \sim \frac{F_\nu}{R} \approx cU_\nu\frac{l_\nu}{R^2}$ vs. pravé str., kde je $cU_\nu \frac{1}{l_\nu} \gg cU_\nu \frac{l_\nu}{R^2}$ ($R \gg l_\nu$ .. opt. husté prostředí)

→ 0. moment: $U_\nu = \frac{\rho j_\nu}{c\varkappa\rho} = \frac{\rho j_\nu}{c\underbrace{\alpha}_{\text{koef. absorpce}}} = \frac{4\pi}{c}B_\nu(T)$

pro zář. v rovnováze s hmotou

→ 1. moment: $F^i_\nu \approx -\frac{c}{3\rho\varkappa}\frac{\partial U_\nu}{\partial x^i} = -\frac{4\pi}{3\rho\varkappa}\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\right)\frac{\partial T}{\partial x^i}$

– difúzní rovnice → říká se tomu (co jsme dělali) difúzní aproximace

• integrace přes frekvence → def. Rosselandovy stř. opacity:

$$\frac{1}{\varkappa_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_\nu}\frac{\partial B}{\partial T}\,d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B}{\partial T}\,d\nu}$$

→ $F_{rad} = -\frac{c\sigma_0}{3\rho\varkappa_R}\nabla T^4$ $\qquad \left(\int B_\nu\, d\nu = \frac{\sigma_0}{\pi}T^4\right)$

zdá se, že mi tu chybí ‚4'

tohle je možná opsáno z vlastních skript a asi má být správně:

$F_{rad} = -\frac{4\sigma_0}{3\rho\varkappa_R}\nabla T^4$ – rozměrově O.K.

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial T} = -\frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{h\nu}{k_0 T^2}\,\frac{\exp(h\nu/k_0T)}{\left(\exp[h\nu/k_0T]-1\right)^2} = -\frac{2T^2k_0^3}{c^2h^2}\left(\frac{h\nu}{k_0T}\right)\frac{e^{\frac{h\nu}{k_0T}}}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_0T}\right)-1\right)^2}$$

$$\rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial B}{\partial T}\,d\nu = -\frac{2T^3k_0^4}{c^2h^3}\int_0^\infty \frac{x\,e^x}{(e^x-1)^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u-1}\,du = \frac{\pi^4}{15} \qquad , \qquad \sigma_0 = \frac{2\pi^5k_0^4}{15c^2h^3}$$

$$\int_0^\infty B_\nu\,d\nu = \frac{2h}{c^2}\frac{k_0^4T^4}{h^4}\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u-1}\,du = \frac{2\pi^4k_0^4}{15c^2h^3}\,T^4 = \frac{\sigma_0}{\pi}\,T^4$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial B}{\partial T}\,d\nu = \frac{\partial}{\partial T}\int_0^\infty B_\nu\,d\nu = \frac{4\sigma_0}{\pi}\,T^3$$

$$F_{rad,i} = -\frac{4\pi}{3\rho}\,\frac{4\sigma_0}{\pi}\,T^3\,\frac{1}{\varkappa_R}\,\frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{4\sigma_0}{3\rho\varkappa_R}\,\nabla T^4$$