Disková akrece

EP25 (AGN8)

- přirozenější – nenulový moment hybnosti
- teoreticky může mít > Eddingtonovskou luminozitu
- tenké disky: $v_\varphi \gg v_r \gg v_z$ → rovnice i veličiny středujeme pro H
- zjednodušená představa: pohazování částic mezi dvěma bližšími poloměry → přenos momentu hybnosti a energie

částice A na R: $\ell = R^2\Omega(R)$ → moment hybnosti přinesený na pol. $R+dR$: $= (R+dR)R\Omega(R)$

B na $R+dR$: $(R+dR)^2\Omega(R+dR)$ → přinese na R: $R(R+dR)\Omega(R+dR)$

→ bilance na pol. R: $\Delta\ell = R(R+dR)\left[\Omega(R+dR)-\Omega(R)\right]$

char. časová škála přenosu odpovídá rychl. zvuku c_s → $dt \approx \frac{dR}{c_s}$

hmotnost $\approx 2\pi R H\rho$

→ přenos momentu hybnosti přes R

$$\equiv G(R) \approx 2\pi R \underbrace{H\rho}_{\Sigma} \frac{c_s}{dR} \underbrace{R(R+dR)}_{=R^2} \underbrace{\left[\Omega(R+dR)-\Omega(R)\right]}_{=d\Omega}$$

kinem. viskozita $\nu = c_s dR$ ⇒

$$G(R) = 2\pi R^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dR} \qquad \left(\frac{d\Omega}{dR} \equiv \Omega'\right)$$

- podobně by se dostal přenos (kin.) energie $\dot{E} = \Omega G$
- viskozita
  - mikroturbulence – dvojhvězdy
  - MRI – AGN, kompaktní objekty
  - globální nestability/struktury (gal. disky)
- fenomenologický popis $\nu = \alpha H c_s$

EP26
(AGN 9)

• předskok k hydrodynamice —

kroutící moment na element v prstenci $\langle R, R+dR \rangle$

$$G(R+dR) - G(R) = \frac{\partial G}{\partial R}\, dR$$

výkon torzních sil $= \Omega \frac{\partial G}{\partial R}\, dR = \left[\frac{\partial}{\partial R}(G\Omega) - G\Omega'\right] dR$

integrace přes celý disk:

$$\dot{E} = \underbrace{G\Omega\Big|_{R_{out}} - G\Omega\Big|_{R_{in}}}_{\text{tok en. přes hranice disku}} - \underbrace{\int_{R_{in}}^{R_{out}} G\Omega'\, dR}_{\text{lokální disipace}}$$

→ lokální disipace na jednotku povrchu ($\frac{1}{2} \Leftarrow 2$ povrchy)

$$D(R) = \frac{G\Omega'}{4\pi R} = \frac{1}{2}\nu\Sigma(\Omega' R)^2$$

• rovnice kontinuity

$$R\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R) = 0$$

• Euler

$$R\frac{\partial}{\partial t}(R\Sigma v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial R}(R^2\Sigma v_R v_\varphi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial R} \qquad \left(G = 2\pi R^3 \nu\Sigma \frac{d\Omega}{dR}\right)$$

• mixem předchozího:

$$R\Sigma v_R (R^2\Omega)' = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial R}$$ → zpátky do kontinuity →

$$R\frac{d\Sigma}{dt} = -\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{2\pi(R^2\Omega)'}\frac{\partial G}{\partial R}\right]$$

• ⊕ def. G a Keplerovské Ω →

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{3}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R^{1/2}\frac{\partial}{\partial R}\left(\nu\Sigma R^{1/2}\right)\right]$$ = rce rad. struktury disku

- rovnice vedení tepla → vývoj hust. profilu
- char. čas. škála $t_{visc} = R^2/\nu$
- pokud se okraj. podmínky mění pomaleji, můžeme dlouhodobě v ustáleném stavu $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

EP 27
(AGN 10)

• ustálená ahned ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)

kontinuita: $\dot{M} \equiv -2\pi R \Sigma v_R = \text{const.}$

$R^2 \Sigma v_R v_\varphi = \frac{G}{2\pi} + \text{const.}/2\pi$

(má ale smysl jak u BH, tak u hvězd s povrchem)

• lehce uvnitř okraje podmínka: $\Omega'(R_* + b) = 0$

$C = 2\pi R \Sigma v_R R^2 \Omega |_{R = R_* + b} = -\dot{M} R^2 \Omega |_{R_* + b} \approx -\dot{M}\sqrt{G M_\bullet R_*}$

dosadit za $G = 2\pi R^3 \nu \Sigma \Omega'$ ⊕ $\Omega' = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{G M_\bullet}}{R^{5/2}}$

→ $\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi}\left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{R}}\right)$

$D(R) = D_0 \left(\frac{R}{R_*}\right)^{-3}\left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{R}}\right)$, $D_0 = \frac{3 G M_\bullet \dot{M}}{8\pi R_*^3}$

$L_{disk} = 2\int_{R_*}^{\infty} 2\pi R\, D(R)\, dR = \frac{G M_\bullet \dot{M}}{2 R_*} = \frac{1}{2} L_{acc}$

• obvykle nutné dodat nějaké řešení, potřebujeme uzavřít [illegible] rovnic a proměnných

– vert. Euler: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{G M_* z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \approx \frac{G M_* z}{R^3}$

– ⊕ $P \approx c_s^2 \rho$

⊕ $\frac{\partial P}{\partial z} \approx \frac{P}{H}$ } → $H(R) \approx c_s R \sqrt{\frac{R}{G M_*}}$

(podmínka pro tenký disk $\frac{v_\varphi}{c_s} \approx \frac{R}{H} \gg 1$)

– stavová rovnice: $P \approx \frac{\rho k_B T}{\mu m_p} + \frac{4\sigma_B}{3c} T^4$

(μ = stř. molekulární váha vodíku = 1 pro neutrální, 1/2 pro plně ioniz.)

– ve přenosu záření: $F(z) = -\frac{16\sigma_B T^3}{3\kappa\rho}\frac{\partial T}{\partial z}$

opticky tlustý disk; $\tau = \rho H \kappa = \Sigma \kappa$

⇓

rovnováha $D(R) = F(H) - F(0) \rightarrow \frac{4\sigma_B}{3\tau} T_c^4 = D(R)$

($T^3 \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{4}\frac{\partial T^4}{\partial z}$, $T_c \gg T_s$)

BB: $\frac{4\sigma_B}{3} T_s^4 = D(R)$ ⊕ $\tau \gg 1$ → $T_c \gg T_s$

Soustava rovnic popisujících standardní tenký disk (jeden z mnoha možných zápisů) ↖ keplerovský, opticky tlustý

EP2b

(1) $\Sigma = \rho H$

(2) $H = c_s R\sqrt{\frac{R}{GM_*}}$

(3) $c_s^2 = P/\rho$

(4) $P = \frac{\rho k_B T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma_0}{3c}T^4$

(5) $\frac{4\sigma_0 T_c^4}{3\tau} = \frac{3GM_*\dot{M}}{8\pi R^3}\left(1-\sqrt{\frac{R_*}{R}}\right)$

(6) $\tau = \Sigma\varkappa(\rho, T_c)$

(7) $\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi}\left(1-\sqrt{\frac{R_*}{R}}\right)$

(8) $\nu = \nu(\rho, T_c, \dots) = \alpha c_s H$

- 8 rovnic pro 8 neznámých $\rho, \Sigma, H, c_s, P, T_c$ a τ
- parametry $M_*, \dot{M}, \alpha$ (a případně další, vstupující v konkrétním tvaru $\varkappa(..)$ a $\nu(..)$)

Př. řešení pro tlakem plynu dominovaný disk ($P = \frac{\rho k_B T_c}{\mu m_p}$) s Kramersovou opacitou (free-free scattering, tj. rozptyl fotonů na volných e^- v poli p^+, tj. inverzní proces k thermal bremsstrahlung - viz. EP2)

$$\varkappa_R \approx 0{,}63\times10^{23}\left(\frac{\rho}{g/cm^3}\right)\left(\frac{T_c}{K}\right)^{-7/2} cm^2 g^{-1} \equiv \varkappa_0\rho T^{-7/2}$$

(5)+(6) : $4\sigma_0 T^4 = 3\Sigma\varkappa_0\rho T^{-7/2}\frac{3GM_*\dot{M}}{8\pi R^3}\gamma^4 \qquad \left(\gamma \equiv \left(1-\sqrt{\frac{R_*}{R}}\right)^{1/4}\right)$

(3)+(4) : $c_s^2 = \frac{k_B T}{\mu m_p}$

(1)+(2)+(3+4) : $\rho = \frac{\Sigma}{H} = \Sigma R^{-3/2}\sqrt{GM_*}\,T^{-1/2}\left(\frac{k_B}{\mu m_p}\right)^{-1}$

(1+2+3+4) + (5+6):

$$4\sigma_0 T^4 = 3\Sigma^2\varkappa_0 R^{-3/2}\sqrt{GM_*}\,T^{-8/2}\left(\frac{k}{\mu m_p}\right)^{-1}\frac{3GM_*\dot{M}}{8\pi R^3}\gamma^4$$

$$T^8 = \frac{9}{4}\Sigma^2 R^{-9/2}\frac{\varkappa_0}{\sigma_0}\frac{(GM)^{3/2}}{8\pi}\dot{M}\gamma^4\left(\frac{k_B}{\mu m_p}\right)^{-1} \qquad (*)$$

(8)+(7): $\alpha H c_s\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi}\gamma^4$

(8+7)+(2) : $\alpha c_s^2 R^{3/2}(GM_*)^{-1/2}\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi}\gamma^4$

EP 29

(8+7+12) + (3+4):

$$R^{3/2}\alpha \frac{k_B T}{\mu m_p}(GM_*)^{-1/2}\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi}f^4$$

$$T = \Sigma^{-1}R^{-3/2}\alpha^{-1}\left(\frac{k_B}{\mu m_p}\right)^{-1}(GM)^{1/2}\frac{\dot{M}}{3\pi}f^4 \quad (**)$$

(*) + (**):

$$\frac{9}{4}\Sigma^2 R^{-3/2}\frac{\varkappa_0}{\sigma_B}\frac{(GM_*)^{3/2}}{8\pi}\dot{M}f^4\left(\frac{k_B}{\mu m_p}\right)^{-1} = \Sigma^{-8}R^{-24/2}\alpha^{-8}\left(\frac{k_B}{\mu m_p}\right)^{-8}(GM_*)^{8/2}\left(\frac{\dot{M}}{3\pi}\right)^8 f^{32}$$

$$\Sigma^{10} = \frac{4}{9}R^{-15/2}\alpha^{-8}(GM)^{5/2}\frac{8\pi}{(3\pi)^8}\dot{M}^7 f^{28}\left(\frac{k_B}{\mu m_p}\right)^{-7}$$

$$\Sigma \propto \alpha^{-4/5}R^{-3/4}M^{1/4}\dot{M}^{7/10}$$

$$T_c \propto \alpha^{9/5}R^{-3/4}M^{1/4}\dot{M}^{3/10}$$

⋮

- další verze std. disku:

$P = P_{gas}$, $\varkappa_T = 0{,}4\ cm^2 g^{-1}$ (Thomsonův rozptyl na volných e^-, viz. EP3)

$P = P_{rad}$, $\varkappa_T = 0{,}4\ cm^2 g^{-1}$

Spektrum SS disku

- z pohledu pozorovatele, který není schopen rozlišit jednotlivá záření disku → F_ν měřené u něj bude

$$F_\nu \propto \int_{R_i}^{R_0} I_\nu R\, dR$$ = tok jedn. plochy za jedn. čas na jedn. frekvence

- zanedbejme změnu frekvence v důsledku relativity, bude $I_\nu^{obs} = I_\nu^{em}$
- nechť je I_ν na každém R izotropní BB (obecně s rozdílnou teplotou); to je v prvním přiblížení oprávněný předp. pro opticky tlustý disk, tj. zář. v termodyn. rovnováze

$$I_\nu = \frac{2h}{c^2}\frac{\nu^3}{\exp[h\nu/k_B T]-1}$$

$$F_\nu \propto \nu^3 \int_{r_i}^{r_o} \frac{R\,dR}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,, \qquad T = T(R) \propto R^{-\beta/4}$$

$$x \equiv \frac{h\nu}{k_B T} \propto \frac{h\nu}{k_B} R^{\beta/4} \qquad R\,dR \propto x^{8/\beta-1}\,\nu^{-8/\beta}\,dx$$

$$F_\nu \propto \nu^{3-8/\beta} \int_{x_i}^{x_o} \frac{x^{8/\beta-1}}{e^x-1}\,dx \qquad x_i \equiv \frac{h\nu}{k_B T_i} \ll x_o \equiv \frac{h\nu}{k_B T_o}$$

a) pro $\frac{h\nu}{k_B T_o} \ll 1$ (tj. $\frac{h\nu}{k_B T} \ll 1$, protože $T \geq T_o$)

$$e^x - 1 \approx x \;\to\; F_\nu \propto \nu^{3-8/\beta} \int_{x_i}^{x_o} x^{8/\beta-2}\,dx \propto$$

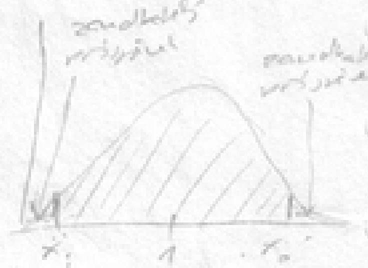
$$\propto \nu^{3-8/\beta} \left[x^{8/\beta-1}\right]_{x_i}^{x_o}$$

?s tím si nejsem tak moc jistý

pro $8/\beta - 1 > 0$: $x_i^{8/\beta-1} < x_o^{8/\beta-1} \;\to\; \underline{F_\nu \propto \nu^2\, T_o}$

b) $k_B T_o < h\nu < k_B T_i$ ($x_o > 1 > x_i$)

$$\to \int_{x_i}^{x_o} \frac{x^{8/\beta-1}}{e^x-1}\,dx \approx \int_0^\infty \frac{x^{8/\beta-1}}{e^x-1}\,dx = \text{const.}$$



$$\to F_\nu \propto \nu^{3-8/\beta}$$

– pro námi odvoz. SS disk : $\beta = 3 \;\to\; F_\nu \propto \nu^{1/3}$

c) pro $\frac{h\nu}{k_B T_i} \gg 1$ se říká, že je $F_\nu \propto \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T_i}}$, ale nepodařilo se mi to důkladně odvodit