# Ustálená, sféricky symetrická akrece

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , $v_\varphi = v_\theta = 0$ , $v_r \neq 0$

rce kontinuity : $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 \rho v) = 0 \Rightarrow 4\pi r^2 \rho v = \text{const}$
$\equiv -\dot{M}$

Euler : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla P + \vec{f}$ např. $-\frac{GM\rho}{r^3}\vec{r}$

$$\rightarrow \quad v\frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0$$

$\oplus$ $\frac{dP}{dr} \equiv c_s^2 \frac{d\rho}{dr}$ $\oplus$ rovnice kontinuity $\rightarrow$

$$v\frac{dv}{dr} - \frac{c_s^2}{vr^2}\frac{d(vr^2)}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0$$

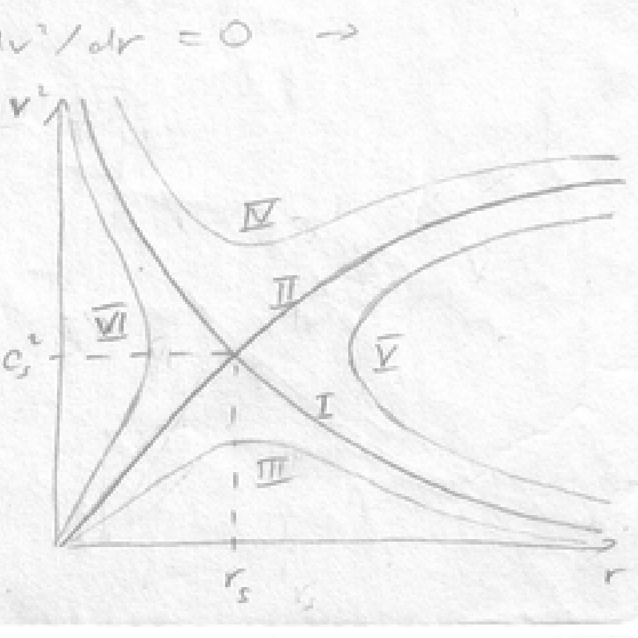
$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{c_s^2}{v^2}\right)\frac{dv^2}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2c_s^2 r}{GM}\right)$$

- řeš. $v(r)$ je obecně složité, závisí na okraj. podmínkách, parametrech ($\dot{M}$, ...) a konkrétním tvaru stavové rovnice – např. polytropické: $P = K\rho^\gamma$, $\gamma = 1$ – izotermální, $\gamma = 5/3$ – adiabatický
- některé vlastnosti řešení se dají vykoukat

předp. : $v(\infty) = 0$, $c_s(\infty) > 0$

– pro $r \to \infty$ je pravá strana $> 0$ $\Rightarrow$ $\left.\frac{dv^2}{dr}\right|_\infty < 0$

– při klesajícím $r$ klesá pravá strana, až dojde k $0$ (pokud to nepřebije rostoucí $c_s$, které obecně není konstantní !) $\rightarrow$ na levé straně to buď vyrovnáme pomocí $v^2 = c_s^2$, nebo $dv^2/dr = 0$ $\rightarrow$ vede to na řešení I a III




– v závislosti na okr. (poč.) podmínkách a parametrech by se dostalo 6 tříd řeš.

– I a II „transsonická“

–

EP22

Integrací Eulera dostáváme Bernoulliho integrál:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{GM}{r} = const = \frac{v^2}{2} + \frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{GM}{r}$$

$$= \frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r}$$

$\Rightarrow$ asymptotické chování pro $r \to \infty$ $\to$ $v^2 \to const.!$

(pro $\gamma > 1$ musí být $v_\infty$ omezení $\oplus$ rovnice kontinuity $\to$ buď $v \to 0$, nebo $\rho \to 0$, a tedy $c_s \to 0$)

- transsonické řeš. I: $v_\infty = 0$ $\to$ $c_s^2(r_s) = c_s^2(\infty)\left(\frac{2}{5-3\gamma}\right)$

rovnice kontinuity: $\dot{M} = 4\pi r_s^2 \rho(r_s) c_s(r_s)$ $\quad (v_s = -c_s)$

stav. rovnice: $c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1}$ $\to$ $\rho(r_s) = \rho(\infty)\left(\frac{c_s(r_s)}{c_s(\infty)}\right)^{2/(\gamma-1)}$

$$\to \dot{M} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_s^3(\infty)}\left(\frac{2}{5-3\gamma}\right)^{\frac{5-3\gamma}{2\gamma-2}}$$

mezihvězdné prostř.: $c_s(\infty) \sim 10\,km/s$, $\rho(\infty) \sim 10^{-24}\,g/cm^3$ $\quad \left(\begin{array}{l} T \sim 10^4\,K \\ n \sim 1\,cm^{-3} \end{array}\right)$

$$\to \dot{M} \sim 10^{11}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{\rho(\infty)}{10^{-24}\,g/cm^3}\right)\left(\frac{c_s(\infty)}{10\,km/s}\right)^{-3} g \cdot s^{-1}$$

pro NS $\to$ $L_{acc} \sim 10^{31}\,erg/s$

- Bondiho poloměr $r_B = \frac{GM}{c_s^2(r_B)}$
- char. poloměr akrece $r_{acc} \sim \frac{GM}{c_s^2(\infty)}$

---

ToDo: zkusit numericky vyřešit (pro $\gamma = 5/3$)

nápov. hint: $c_s^2 = c_s^2(\infty)\left(\frac{\rho}{\rho(\infty)}\right)^{\gamma-1}$

v kritickém bodě $v^2 = c_s^2$ a $r = \frac{GM}{2c_s^2}$

$\to$ mělo by s pomocí rovnice kontinuity vyjít $c_s^{5-2\gamma} = c_\infty^2 \rho_\infty^{1-\gamma}\left(\frac{\dot{M}}{\pi G^2 M^2}\right)^{\gamma-1}$

$\to$ měla by být vázaná míra akrece, $c_s$, $c_\infty$ a $\rho_\infty$

$\to$ určit $r_s$ a $\frac{dv^2}{dr}$ a numericky zintegrovat