1

Jestliže se bod pohybuje po kruhovém oblouku pod vlivem centrální síly, která vždy prochází pevným bodem ležícím na téže kružnici, potom působící síla je nepřímo úměrná páté mocnině vzdálenosti. Dokažte!

[Návod k řešení: Vyjděte z rovnice kružnice, přejděte k počátku ležícímu na kružnici a dosaďte do Binetova vzorce.]

(Andrle 1971[1], str. 30)

2

Mějme centrální sílu, jejíž velikost se mění se vzdáleností od středu podle vztahu

$$F = Ar^n,$$

takže pro potenciál soustavy platí

$$\Phi = Br^{n+1},$$

kde n je celé číslo, A a B jsou konstanty. Dokažte, že pravou anomálii v z rovnic $x = r\cos v$, $y = r\sin v$ (kde r značí velikost průvodiče) lze vyjádřit ve tvaru elementární funkce r pouze v případech

$$n = 1, n = -2, n = -3.$$

[Návod k řešení: Vyjděte ze zákona zachování energie. Dostanete výraz, na který aplikujete poučku, že obecně vede integrál z odmocniny racionální funkce k elementárním funkcím pouze tehdy, je-li stupeň výrazu pod odmocninou nanejvýš dvě. Necháme-li stranou logaritmický potenciál, dostaneme druhé dva případy přímo a prvý případ po substituci $u^2 = x$.]

(Andrle 1971, str. 30)

3

Mějme silové pole z příkladu 2. Dokažte, že pravou anomálii v z rovnic $x = \cos v$, $y = r\sin v$ lze vyjádřit ve tvaru eliptických integrálů závislých na r pouze[2] v případech:

$$n = 5, n = 3, n = 0, n = -4, n = -5, n = -7.$$

[Návod k řešení: Vyjděte z výsledného vztahu minulé úlohy a využijte poučky z integrálního počtu, podle které integrály tvaru

$$\int R(x, \omega)\mathrm{d}x,$$

[1] Pavel Andrle: Základy nebeské mechaniky, Academia Praha 1971

[2] K eliptickým integrálům by zkoumaný výraz vedl i pro některá neceločíselná n. Tím se však nebudeme zabývat.

kde R je racionální funkce, $\omega = (\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)^{1/2}$ vedou k eliptickým integrálům. Další postup důkazu je stejný jako v předešlém případě.]

(Andrle 1971, str. 30)

4

Odvoďte Laplaceovy integrály

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{C} - k_1^2 \vec{r}/r = \vec{G},$$

kde $\vec{C} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ je konstntní vektor úhrnného kinetického momentu a $\vec{G}$ je nový konstantní vektor.

[Návod: Derivujte součin $\dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$ podle času a použijte identit $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = -r^3 \cdot \mathrm{d}(r^{-1})/\mathrm{d}t, \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.]

(Andrle 1971, str. 74)

5

Určete poměr hmoty Slunce a hmoty Země, přičemž vycházejte z těchto údajů: Délka roku = 365,2 dne, délka siderického měsíce = 27,3 dne, střední vzdálenost Země–Slunce = 150 milionů km, střední vzdálenost Země–Měsíc = 380 tisíc km.

[Návod: Do třetího Keplerova zákona dosazujte střední vzdálenosti. Srovnáte-li výsledek s výsledkem získaným z přesného 3. Keplerova zákona, snadno se přesvědčíte, odkdy se nedopouštíte při dané přesnosti v podstatě žádné chyby.]

(Andrle 1971, str. 75)

6

Dvě částice obíhají kolem společného těžiště po kruhových drahách s oběžnou dobou P. Předpokládejte, že v určitý okamžik jejich pohyb zastavíme. Dokažte, že částice se potom srazí za dobu $\tau = \frac{1}{2} P_0 \sqrt{2}$.

[Návod: Pád považujte za eliptickou dráhu s nekonečně malou hodnotou b.]

(Andrle 1971, str. 75)

7

Pro libovolnou uzavřenou dráhu v problému dvou těles platí:

1. Součin rychlosti planety v perihelu a rychlosti v afelu nezávisí na excentricitě dráhy planety, protože
$$V_{per} \cdot V_{afel} = k_1^2 a^{-1}.$$
2. Poměr těchže veličin závisí pouze na excentricitě, protože
$$V_{per}/V_{afel} = (1+e)/(1-e).$$
3. Pro součet dostáváme
$$V_{per} + V_{afel} = 2k_1/p^{1/2}$$
4. a konečně pro rozdíl
$$V_{per} - V_{afel} = 2k_1 e/p^{1/2}.$$

Dokažte uvedené vztahy!

(Andrle 1971, str. 75)

8

Určete závislost oběžné doby umělé družice na výšce perigea a apogea nad povrchem Země. Jaká je nejkratší možná oběžná doba umělé družice Země, víme-li, že družice zanikají v zemské atmosféře ve výšce kolem 180 km.

(Andrle 1971, str. 75)

9

Určete výšku stacionární družice nad zemským povrchem a zjistěte, kolik procent povrchu Země je z této družice vidět. (Stacionární družice je taková družice, která obíhá v rovině rovníku po kruhové dráze s oběžnou dobou 1 hvězdný den.)

(Andrle 1971, str. 75)

10

Při studiu pohybu planet kolem Slunce může při řešení některých problémů posloužit tzv. hodograf, který dostaneme takto: Od Slunce nanášíme úsečky, které mají velikost a směr rychlosti planety v jednotlivých bodech dráhy. Jaké je geometrické místo konců těchto úseček? (Odpověd: Kružnice, která nemá střed v počátku.)

(Andrle 1971, str. 75)

11

Dokažte

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(r^2) = 2k_1^2(\frac{1}{r} - \frac{1}{a})$$

[Návod: Využijte výsledků příkladu 12]

(Andrle 1971, str. 75)

12

Dokažte

$$\begin{array}{ll} \dot{E} = \frac{an}{r} = \frac{k_1}{a^{1/2}r} & \ddot{E} = -\frac{k_1^2}{r^3} e \sin E \\ \dot{v} = \frac{k^1 p^{1/2}}{r^2} & \ddot{v} = -\frac{2k_1 e \sin v}{r^3} \\ \dot{r} = \frac{k_1 e \sin v}{p^{1/2}} = \frac{k_1 a^{1/2}}{r} e \sin E & \ddot{r} = \frac{k_1^2 e \cos v}{r^2} = \frac{k_1^2 e}{r^2} \cdot \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \end{array}$$

(Andrle 1971, str. 76)

13

Dokažte identity

$$\begin{array}{l} r^{1/2} \sin \frac{1}{2} v = [a(1+e)]^{1/2} \sin \frac{1}{2} E \\ r^{1/2} \cos \frac{1}{2} v = [a(1-e)]^{1/2} \cos \frac{1}{2} E \\ \sin \frac{1}{2}(v - E) = (a/r)^{1/2} \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E = (r/p)^{1/2} \sin \frac{1}{2} \varphi \sin v \\ \sin \frac{1}{2}(v + E) = (a/r)^{1/2} \cos \frac{1}{2} \varphi \sin E = (r/p)^{1/2} \cos \frac{1}{2} \varphi \sin v \\ 1 - (r/p) \sin^2 v = \cos v \cos E \\ p(\cos^2 v + \cos v \cos E - 2) \sin^{-1} v = -(r+p) \sin v \\ r \tan^{-1} v = k_1 p^{1/2} r^{-1} - k_1 p^{-1/2} \\ e \sin v = k_1^{-1} p^{1/2} \dot{r} \\ e \cos v = p/r - 1. \end{array}$$

(Andrle 1971, str. 76)

14

Řešte všemi uvedenými metodami Keplerovu rovnici pro tyto hodnoty střední anomálie

$$\begin{array}{ll} M = 35°26', & M = 0{,}266 \\ M = 139°17'25'', & M = 2{,}74975 \\ M = 283°, & M = 5{,}1, \end{array}$$

a přitom předpokládejte, že $e = 0{,}2437$. Jestliže bude $a = 2{,}392$, určete i průvodič a pravou anomálii.

(Andrle 1971, str. 76)

15

Kometa má parabolickou dráhu charakterizovanou průvodičem perihelu $q = 0{,}37$. Jak daleko od Slunce bude kometa za 100 000 let? (Vliv planet a hvězd zanedbejte.)

(Andrle 1971, str. 77)

16

Určete, za jak dlouho po průchodu perihelem dosáhne pravá anomálie komety s parabolickou drahou 90°. Řešte nejdříve obecně a z výsledku určete průvodič perihelu komety, u které byla pravá anomálie rovna 90° za 30 dnů. ($q = 0{,}42$ AU)

(Andrle 1971, str. 77)

17

Kosmická sonda byla vypuštěna s minimální spotřebou energie na mezihvězdnou pouť. Za jak dlouho bude na obloze vzdálena 5° od protisvitu (opačný bod na obloze, než je Slunce), pokud budeme předpokládat, že se sonda pohybuje v rovině ekliptiky a že se Země právě nalézá na přímce apsid dráhy stanice mezi Sluncem a sondou. [Návod: Zanedbejte vliv planet a hvězd, předpokládejte, že od samého počátku je sonda pouze pod vlivem Slunce a zanedbejte vzdálenost Země–Slunce.]

(Andrle 1971, str. 77)

18

Hmotný bod se pohybuje po elipse s parametrem p a excentricitou e, a to konstantní úhlovou rychlostí ω vzhledem k jednomu ohnisku (které položte do počátku souřadnicové soustavy.) Nalezněte složky rychlosti a zrychlení v_x, v_y, v_r, v_ϑ, a_x, a_y, a_r, a_ϑ jako funkce času t a průvodiče r.

(Mou[3], str. 16)

[3]Moulton…

19 Vlastnosti druhého ohniska

V nebeské mechanice standardně značíme: průvodič planety (z ohniska ve kterém se nachází Slunce) r (resp. $\vec{r}$), pravou anomálii (měřenou z ohniska ve kterém se nachází Slunce a narůstající od perihelu) v.

Dále označme: průvodič planety z druhého ohniska s, anomálii měřenou z druhého ohniska (a narůstající od perihelu) w.

Řešte následující úlohy:

1. Nalezněte vztah pro velikost průvodiče s jako funkci excentrické anomálie E.
2. Nalezněte vztah mezi anomálií w a excentrickou anomálií E (anologicky vztahu mezi pravou anomálií v a excentrickou anomálií E)
3. Dokažte, že $rs\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \text{konst.}$
4. Nalezněte rozvoje $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ a $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ v goniometrických funkcích excentrické anomálie E.
5. Pomocí získaných rozvojů[4] dokažte, že $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \doteq \text{konst.}$

[4] Pro přesný důkaz bychom potřebovali rozvoj funkce $\cos E$ do funkcí argumentu M násobených mocninami e.